Bevezetés a számításelméletbe I.

5. gyakorlat, 2004. október 18.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Determinánsok

50. Határozzuk meg a következő permutációkban az inverziók számát!
(a) $5, 2, 4, 1, 6, 3$ (b) $100, 99, 98, \ldots, 1$ (c) $2, 3, \ldots, 100, 1$

51. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát.

$$\begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 14 & 15 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 11 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 9 & 5 & 6 & 8 & 2 \\ 3 & 6 & 5 & 8 & 8 \end{vmatrix}$$

52. Számítsuk ki az alábbi mátrixok determinánsát. A mátrix $n \times n$-esek, a nem jelzett elemek értéke pedig 0.
(a) $a_{i,i} = 1$
(b) $a_{i,i} = A$
(c) $a_{i,n+1-i} = 1$
(d) $a_{i,i} = a_{i,i+1} = a_{n,1} = 1, \quad n = 2k$
(e) $a_{i,j} = i + j - 1$
(f) $a_{i,j} = (i + j - 1)^2$
(g) $a_{i,j} = \min(i, j)$
(h) $a_{i,j} = \binom{i+j-1}{i-1}$

53. Mi a kapcsolat egy permutációnak és az inverzének az inverziószáma között?

54. Egy $n \times n$-es mátrix ($n \geqslant 2$) minden eleme ± 1. Igazoljuk, hogy determinánsa osztható 2^{n-1}-nel.

55. Megválasztható-e c értéke úgy, hogy az alábbi mátrix determinánsa ne nulla legyen?

$$\begin{pmatrix} c & c+1 & c+2 \\ c+3 & c+4 & c+5 \\ c+6 & c+7 & c+8 \end{pmatrix}$$

56. Van egy $n \times n$-es mátrixunk, melynek az elemei egy kivételével rögzítettek. Igaz-e, hogy az utolsó elem mindig megválasztható úgy, hogy az így kitöltött mátrix determinánsa 0 legyen?

57. A pontos érték meghatározása nélkül mutassuk meg, hogy az alábbi determináns értéke nem zérus.

$$\begin{vmatrix} 1222 & 1492 & 1956 & 1789 \\ 1456 & 1000 & 1867 & 1686 \\ 1848 & 1945 & 1552 & 1640 \\ 1769 & 1514 & 1918 & 1812 \end{vmatrix}$$

58. Legyen $\mathbf{A}$ egy n sorból és n oszlopból álló mátrix, a k-adik sorának j-edik elemét jelölje a_{kj}. Legyen $\mathbf{B}$ az az $n \times n$-es mátrix, amelyben a k-adik sor j-edik eleme $b_{kj} = \frac{k}{j} a_{kj}$ $(1 \leq k, j \leq n)$. Mennyi $\mathbf{B}$ determinánsa, ha tudjuk, hogy $\mathbf{A}$ determinánsa 1?

59. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme egyjegyű, így sorai n jegyű pozitív egész számokként is olvashatók. Mi több, az így kapott számok mindegyike osztható 2004-gyel. Igaz-e, hogy a determinánsa is osztható 2004-gyel? $(\star)$

60. Egy $n \times n$-es mátrix minden eleme véletlenszerűen 0 vagy 1. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a mátrix determinánsa 0? $(\star\star)$