Bevezetés a számításelméletbe I.

3. gyakorlat, 2004. szeptember 27.

Koblinger Egmont <egmont@cs.bme.hu>

Vektorterek 2.

27. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat:
    (a) A $\underline{0}$ minden vektorrendszertől függ.
    (b) Egy vektorrendszer függ bármely őt tartalmazó vektorrendszertől.
    (c) Egy egyelemű vektorrendszer akkor és csak akkor lineárisan független, ha nem a $\underline{0}$-ból áll.
    (d) Minden vektorrendszer összefüggő, amely tartalmazza a $\underline{0}$-t.
    (e) Minden vektorrendszer összefüggő, amely egy elemet kétszer tartalmaz.
28. Igazoljuk, hogy egy lineárisan független vektorrendszer tetszőleges részhalmaza is lineárisan független.
29. Igazoljuk, hogy egy lineárisan összefüggő vektorrendszerhez néhány vektort hozzávéve továbbra is lineárisan összefüggő rendszert kapunk.
30. Kifejezhető-e $\mathbb{R}^4$-ben a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ az $\underline{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ vektorok segítségével?
31. Kifejezhető-e a $\underline{0} \in \mathbb{R}^4$ az előző példában definiált $\underline{v}$, $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ vektorok segítségével?
32. Lineárisan összefüggők-e az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$ vektorok?
33. (a) Legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér lineárisan független elemhármasa. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$?
    (b) Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ egy vektortér olyan vektorai, melyekre $\underline{a}+\underline{b}$, $\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{c}+\underline{a}$ lineárisan függetlenek. Lineárisan független-e ebben a térben $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$?
34. Legyenek $\underline{u}$ és $\underline{v}$ egy vektortér független elemei, és legyenek a, b, c, d valós számok. Mi a feltétele annak, hogy az $a\underline{u} + b\underline{v}$ és a $c\underline{u} + d\underline{v}$ vektorok is függetlenek legyenek?
35. Bizonyítsuk be, hogy ha a V vektortérben az $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k)$ egy lineárisan független rendszer és a $(\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_{k+1})$ pedig egy generátorrendszer, akkor a két vektorrendszer közül pontosan az egyik bázist alkot V-ben.
36. Legyenek $(\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k)$ egy vektortér lineárisan független vektorai és legyen $\underline{x} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \underline{a}_i$. Bizonyítsuk be, hogy $\underline{a}_1 \in \langle \underline{x}, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \rangle$ akkor és csak akkor teljesül, ha $\lambda_1 \neq 0$!
37. Egy vektortérben az $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k$ vektorok is, a $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_l$ vektorok is külön-külön lineárisan független rendszert alkotnak. Bizonyítsuk be, hogy ha $\langle \underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_k \rangle \cap \langle \underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_l \rangle = \{\underline{0}\}$ (vagyis a két altér metszete csak a zérus vektorból áll), akkor ez a $k+l$ darab vektor együtt is lineárisan független!
38. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ lineárisan független vektorok és λ skalár egy vektortérben. Elkészítjük az $\underline{a}+\underline{b}+\underline{c}$, $\underline{a}-\underline{b}-\underline{c}$, $\underline{b}-\lambda\underline{c}$ vektorokat. Határozzuk meg, hogy a λ skalár mely értékei mellett lesz ez utóbbi három vektor lineárisan független és melyeknél összefüggő.
39. Egészítsük ki az $(1,2,3,4)$, $(0,1,2,5)$, $(2,5,8,10)$ vektorrendszert $\mathbb{R}^4$ egy bázisává!
40. Generátorrendszert alkotnak-e az $(1,0,1,0)$, $(0,1,0,1)$, $(2,3,4,1)$, $(3,0,1,2)$, $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$ vektorok? Ha igen, válasszunk ki egy bázist belőle!
41. Tudjuk, hogy $\langle \underline{a}, \underline{b} \rangle = \langle \underline{c}, \underline{d}, \underline{e} \rangle$. Lineárisan függetlenek-e az $\{\underline{a}, \underline{c}, \underline{e}\}$ vektorok?