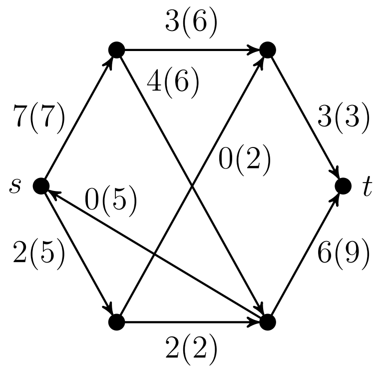
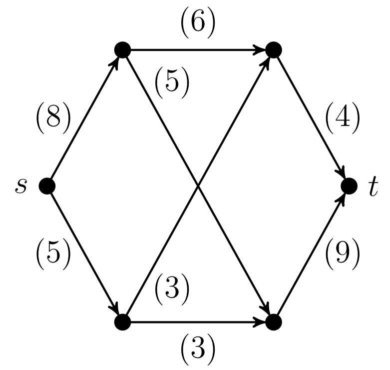
SzA IX. gyakorlat, 2017. november 8.
Párosan folyunk

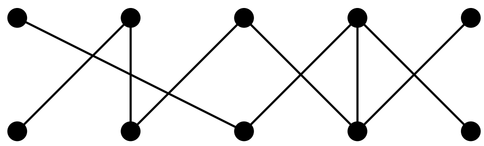
Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

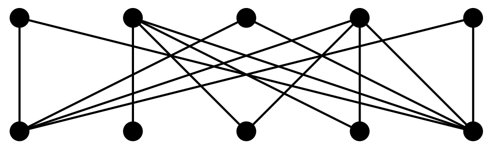
1. Növeljük a bal oldali gráfban a megadott folyamot, ha ez lehetséges, vagy mutassuk meg, hogy ez már egy maximális folyam!





2. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a fenti jobb oldali gráfban!
3. Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban az alternáló utas módszerrel!

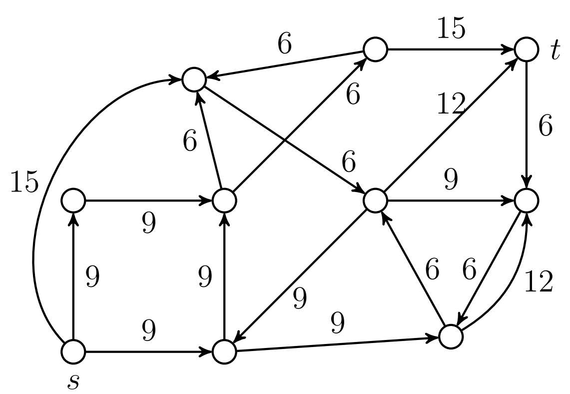


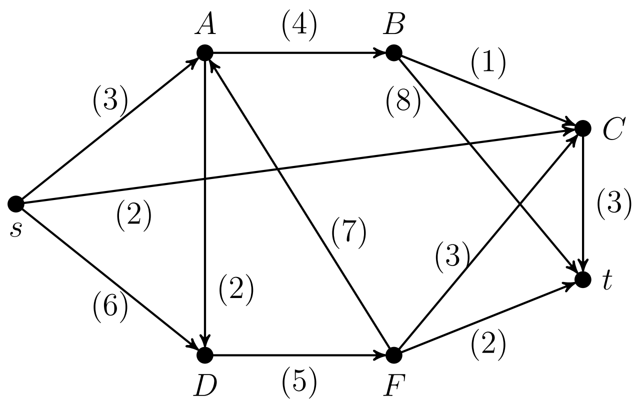


4. Adjunk meg egy maximális párosítást a fenti jobb oldali gráfban!
5. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!
6. Bizonyítsuk be, hogy bármely k-reguláris ($k > 0$) páros gráfban van teljes párosítás.

---

7. **[ZH 2008. október 10.]** Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)





8. Határozzunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a fenti jobb oldali hálózatban!
9. **[ZH 2014. november 27.]** Tegyük fel, hogy a G egyszerű, páros gráf A színosztálya 28, a B színosztálya 33 pontú. Tegyük fel, hogy a B színosztálynak valemely Y részhalmazára $|Y| = 18$ és $|N(Y)| = 12$. Mutassuk meg, hogy az A színosztályra nem teljesül a Hall feltétel, azaz létezik olyan $X \subseteq A$ halmaz, melyre $|N(X)| < |X|$.

10. **[ZH 2010. október 15.]** Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?

11. **[pZH 2011. december 1.]** A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a $v_i v_j$ él kapacitása $c(v_i v_j) = (i, j)$, más éle G-nek nincs. Ha a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12}-ből v_{16}-ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15}v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyamnagyság elérhető? *Megjegyzés: (i, j)-vel jelöljük i és j számok legnagyobb közös osztóját.*

12. 2035-ben a VIK-es gólyabálon 601 lány és 601 fiú vesz részt, mindenkinek legalább 300 ellenkező nemű ismerőse van (az ismeretségek kölcsönösek). Biztosan össze lehet-e állítani 601 olyan fiú-lány párt, ahol a párok tagjai ismerősök?

13. Igaz-e, hogy ha egy hálózatban minden él kapacitása páratlan szám, akkor van olyan maximális folyam, aminek minden élén a folyam értéke páratlan szám? És ha páros?

14. Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását csökkentve a maximális folyamnagyság csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását növelve, a maximális folyamnagyság növekszik?

15. **[ppZH 2012. december 12.]** Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban f maximális nagyságú folyam és C a G egy olyan irányított köre, amelynek minden élén f pozitív értékeket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy C egyetlen éle sem tartozik minimális kapacitású (értékű) st-vágáshoz.

16. A házassági tanácsadáson n pár ücsörög a váróban. Ebben a kiélezett helyzetben mindenki az asztalon heverő magazinok közül próbál egy számára érdekeset megkaparintani. Tudjuk, hogy minden várakozó legalább n magazint érdekesnek talál, ám valamiféle különös ok folytán nincs olyan magazin, amit ugyanannak a házaspárnak mindkét tagja szívesen forgatna. Bizonyítsuk be, hogy mindenki egyszerre találhat kedvére való olvasnivalót.

17. G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?

18. A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!

19. **[ppZH 2012. december 12.]** Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ az egyszerű G páros gráf egy színosztálya, és tegyük fel, hogy $d(a_i) > i$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Igazoljuk, hogy G-ben van A-t fedő párosítás.

20. **[pZH 2010. ősz]** Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.

21. Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági- és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?

22. Igazoljuk, hogy ha a (G, s, t, c) hálózatban a c kapacitások egészek és f egy megengedett folyam, akkor létezik olyan megengedett f' *egész* folyam is, amelyre $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden e élre.

23. Egy (G, s, t, c) hálózatban minden él piros, fehér, vagy zöld. Ha csak a piros és fehér, vagy csak a piros és zöld, vagy csak a fehér és zöld éleket tekintjük, akkor a kapott hálózatokban a maximális nagyságú st-folyam nagysága 10. Bizonyítsuk be, hogy a teljes hálózatban a maximális nagyságú st-folyam nagysága legalább 15.