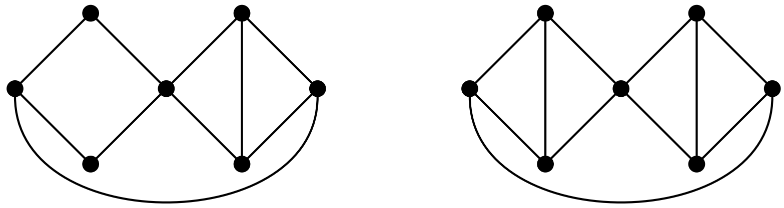
SzA VII. gyakorlat, 2017. október 18.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Színesen körözünk

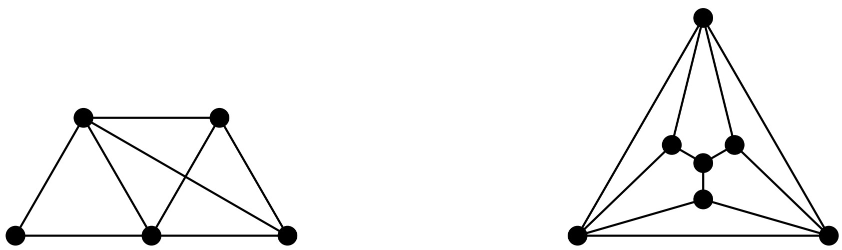
1. **[ZH 2006. március 28.]** Legyen G egy összefüggő gráf, amiben minden pont foka páros. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk G-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta?
2. Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_ip_j \in E(G)) \iff |i-j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út?
3. Mutassunk Hamilton-kört a következő gráfokban, vagy lássuk be, hogy nincs!



4. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
5. **[pZH 2016. december 5.]** Tegyük fel, hogy a 10 csúcsú, egyszerű G gráfban az egyes csúcsok fokszámai rendre $3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 9, 9, 9$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek nincs Hamilton-köre.
6. Tegyük fel, hogy a 10 csúcsú, egyszerű G gráfban az egyes csúcsok fokszámai rendre $3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 6$. Bizonyítsuk be, hogy G-nek van Hamilton-köre.
7. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráf 4-reguláris, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.

---

8. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:
   C_4, C_5, alábbi 2 gráf

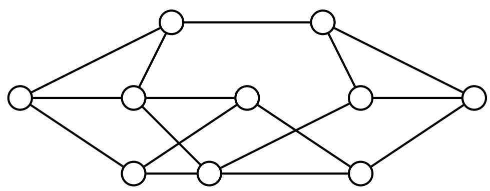


9. Van-e olyan G gráf, amiben nincs 4 csúcsú teljes részgráf, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?

---

10. Van-e olyan egyszerű, összefüggő gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
11. Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leülhetnek egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!
12. Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!
13. Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű egyszerű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?
14. Drótból szeretnénk egy 4×4-es négyzetrácsot forrasztani, ahol az egyes négyzetek oldalhossza pontosan 1 cm. Megoldható-e a feladat akkor, (a) ha 8 db 5 cm-es drótunk van ill. (b) ha 5 db 8 cm-es drótot használhatunk? A drótokat elvágni nem, csak forrasztani szabad.
15. **[ZH 2012. november 22.]** Tfh az egyszerű G gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül u és v foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-út.

16. **[pZH 2014. december 8.]** Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös éle.
17. **[ZH 2013. november 28.]** Tudjuk, hogy az $n \geq 20$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $(n+4)/2$. Bizonyítsa be, hogy G -ben van két olyan Hamilton-kör, amelyeknek nincsen közös élük!
18. Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!
19. **[pZH 2011. december 1.]** Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.
20. A mellékelt ábra egy csatornahálózat vázlatos rajzát mutatja. A vonalak a csatornákat jelképezik. Minden egyes csomópontban, ahol csatornák találkoznak, egy-egy létra vezet a felszínre. Nem kizárható, hogy úgynevezett endzsió terroristák egy sátáni terv keretében valahol megmérgezték a hálózatot. Ezért fertőtleníteni kell minden egyes csatornát, aminek az a módja, hogy a közszolgálati csatornák élő közvetítésében beszámolnak arról, amint egy erre a feladatra speciálisan kiképzett szakember súlyos védőfelszerelésben végigkúszik a csöveken. Mivel a szkafanderre is tapadhat méreg, a már fertőtlenített szakaszra nem szabad ismételten behatolni. Legalább hányszor kell a szakembernek kievickélnie a csatornából ahhoz, hogy a teljes fertőtlenítést elvégezhesse?



21. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő $G = (V, E)$ gráfban minden fokszám páros és $X \subseteq V$, akkor X és $V \setminus X$ között páros számú él fut.
22. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk!
23. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G-v$ ill. a $G-e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.
24. Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.
25. (a) Mutassunk olyan $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ élű egyszerű gráfot (általános n-re), amiben nincs Hamilton-kör!

    (b) Mutassunk meg, hogy bármely, legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ élű egyszerű gráfban van Hamilton-kör!
26. Egy egyszerű gráf fokszámai a következők: $10, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 5, 5$. Mutassuk meg, hogy van Hamilton-köre!
27. Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!
28. Mutassuk meg, hogy egy 20 csúcsú, 9-reguláris egyszerű gráfhoz hozzá tudunk venni az egyszerűség megtartásával 9 élet úgy, hogy az eredményül kapott gráfban legyen Euler-séta!

---

29. G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G-ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?
30. Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G-nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!

(Lapozz!)

31. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.

32. Mutassuk meg, hogy ha G véges, egyszerű gráf, akkor $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$, ahol $\alpha(G) = k$, ha G-ben van k db páronként nem szomszédos csúcs, de $k+1$ már nincs.

33. Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!

34. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

35. Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!