SzA XI. gyakorlat, 2017. november 22.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

$3 + 2 = 1$

1. Határozzuk meg az Euklidészi algoritmussal $lnko(504, 372)$-t! Határozzuk meg $lkkt(504, 372)$-t! Hány osztója van 504-nek?
2. Melyek azok a p pozitív prímszámok, amelyekre
   (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím?
   (b) $p^2 + 2$ prím?
   (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?
3. Bizonyítsuk be, hogy $39^{14} - 1$ osztható 5-tel!
4. $8x \equiv 3 \pmod{21}$
5. $9x \equiv 24 \pmod{96}$
6. Ha 10839-et és 11863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?
7. Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Azt tudja biológiából, hogy minden százlábúnak legföljebb 344 lába van. Ha 13-asával számolja a lábait, akkor 3 marad ki, ha 17-esével számolja, akkor viszont 10 marad ki. Hánylábú a százlábú?

---

8. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $n^{11} + 10n$ osztható 11-gyel!
9. $49^{49} \equiv x \pmod{15}$
10. Mi a 403^{402} utolsó három, a $29^{39^{49}}$ utolsó két és a $7^{6^{5^{4^{3^2}}}}$ szám utolsó jegye tízes számrendszerben?
11. Gyorshatványozással számítsuk ki $7^{19} \pmod{5}$ értékét!

---

12. $15x \equiv 3 \pmod{18}$
13. $202x \equiv 157 \pmod{203}$
14. $14x - 4 \equiv 80 \pmod{21}$
15. $78x - 15 \equiv 198 \pmod{48}$

---

16. **[PZH 2008. december 5.]** Tudjuk, hogy n és m olyan pozitív egészek, amikre $lnko(n, m) = 10$ és $lkkt(n, m) = 1000$, ahol $lnko(n, m)$ és $lkkt(n, m)$ pedig rendre az n és m legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik. Határozzuk meg az nm szorzatot.
17. a és b páratlan számok, $c = a^2 + b^2$. Mennyi c és 4 legnagyobb közös osztója?
18. Igazoljuk, hogy tetszőleges n szám 9-es osztási maradéka megegyezik a 10-es számrendszerben felírt alakjában szereplő számjegyei összegének 9-es maradékával.
19. Létezik-e olyan háromjegyű szám, amely osztóinak száma osztható 11-gyel?
20. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész egyértelműen felírható $n = k^2 \cdot l$ alakban, ahol k és l pozitív egészek, továbbá l egyetlen négyzetszám osztója az 1.
21. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen n-re nem egyszerűsíthető!
22. n és m pozitív egész számok. Hány olyan pozitív egész szám van, ami legalább az egyiknek osztója?
23. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 osztója van, akkor n nem lehet egy egész szám ötödik hatványa!
24. **[ZH 2002.]** Legyen $k \geq 2$ és jelölje $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legnagyobb közös osztóját, $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ pedig az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legkisebb közös többszörösét. Mutassuk meg, hogy $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot [a_1, a_2, \ldots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ akkor és csak akkor áll fönn minden pozitív egészekből álló szám k-asra, ha $k = 2$.

25. Legyen $F_0 = 0, F_1 = 1$, és $n \geq 2$ esetén az n-dik Fibonacci szám $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazoljuk, hogy F_n és F_{n+1} relatív prímek.
26. Igazoljuk, hogy tetszőleges 10-es számrendszerben felírt $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ szám 11-es osztási maradéka megegyezik az $a_0 - a_1 + a_2 \ldots \pm a_n$ szám 11-es maradékával.
27. Igazoljuk a 7-tel való oszthatóság ellenőrzésére szolgáló alábbi módszer helyességét. Az n szám pontosan akkor osztható 7-tel, ha 7-tel osztható az a szám, amit n tízes számrendszerbeli alakjából úgy kapunk, hogy az utolsó számjegy levágásaval kapott számból levonjuk az utolsó számjegy kétszeresét. Pl. 2002 pontosan akkor osztható 7-tel, ha $200 - 2 \cdot 2 = 196$ osztható 7-tel. Ez pedig igaz, hisz $7 \mid 19 - 2 \cdot 6 = 7$, tehát $7 \mid 2002$.
28. Dzsúlió már régóta gyűjt nagy álmára, hogy volt barátnője, Vanessza mobiltelefonon őrzőtt arcképét a bicepszére tetováltassa. Legjobb barátja, Rodzser tanácsára, míg össze nem jön az ehhez szükséges 35000 forint, átváltja az ezer forintosokban tartott megtakarítását euróra, amit a Rodzser által ajánlott Rikárdótól (az ismeretségre tekintettel) szuperkedvezményes 330 Ft-os árfolyamon vesz meg. Miután Rikárdó centekkel nem foglalkozik, Dzsúliónak éppen 140 Ft marad a megtakarításából, amiből Rodzserrel közösen lottószelvényt vesznek azzal, hogy a nyereményt majd felezik. Hány euró boldog birtokosának mondhatja magát Dzsúlió a sikeres tranzakció után?

---

29. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímszámra: $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$
30. $42^{600} \equiv x \pmod{13}$
31. $x^{11999} \equiv 5 \pmod{13}$
32. Milyen maradékot ad a 31-gyel osztva, ha $a^{100} \equiv 5 \pmod{31}$ és $a^{101} \equiv 19 \pmod{31}$?
33. Milyen maradékot ad 59^{99} 101-gyel osztva?
34. Mi az utolsó három jegye a $999^{777^{8888}}$ számnak?
35. Mi az utolsó két jegye az $1997^{2001^{2005}}$ számnak?
36. Legyenek m és n pozitív egészek, továbbá $m \mid n$. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(m) \mid \varphi(n)$.
37. Mely n számokra lesz $\varphi(n)$ prímszám? Mikor lesz $\varphi(n)$ páratlan?

Hasznos tudnivalók

- $\varphi(m)$: 1 és m közötti m-hez relatív prímek száma; $\varphi(p) = p - 1$, ha p prím
- $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, ha p prím
- $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, ha $(a, b) = 1$
- $\varphi(n) = \prod(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = \prod(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1} = n \prod(1 - \frac{1}{p_i})$
- Euler-Fermat tétel: ha $(a, m) = 1$, akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$
- Kis-Fermat tétel: ha p prím, akkor $a \equiv a^p \pmod p$