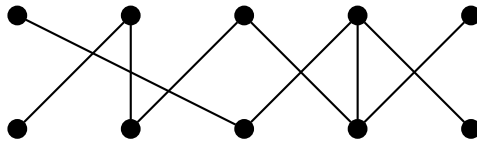
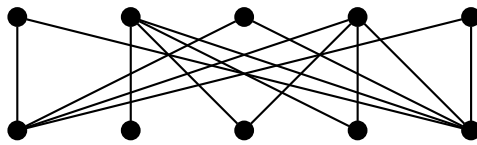


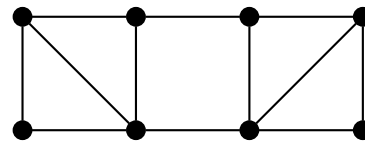
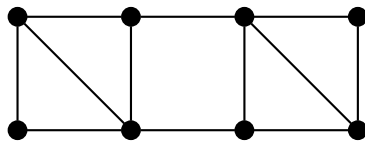
1. Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban az alternáló utas módszerrel!



2. Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!



3. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!
4. Határozzuk meg  $\alpha(G)$ ,  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  értékét a következő gráfokban, és adjunk hozzájuk megfelelő csúcs- vagy élhalmazokat!



5. A 2000 csúcsú  $G$  gráfban  $\tau(G) = 678$ . Igazoljuk, hogy  $G$ -ben nincs teljes párosítás!
6. Igazoljuk, hogy  $\tau(G) \leq 2\nu(G)$  teljesül tetszőleges hurokélmentes  $G$  gráfra. (Továbbá  $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$  is. :P)
7. A  $G$  gráf egyszerű, összefüggő, 100 csúcsa van és van benne 25 élű párosítás. Igazoljuk, hogy  $\omega(\overline{G}) \leq 75$ .
8. Bizonyítsuk be, hogy bármely  $k$ -reguláris ( $k > 0$ ) páros gráfban van teljes párosítás.
- 
9.  $G$  páros gráf. Igaz-e, hogy ha  $G$ -ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?
10. [ZH 2010. október 15.] Legyenek a  $G$  irányítatlan gráf csúcsai az  $1, 2, \dots, 100$  számok, az  $i$  és  $j$  csúcs között pedig akkor fusson él, ha  $j < i$  esetén az  $i - j$  szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékkal. Páros-e a  $G$  gráf?
11. A  $G = (A, B, E)$  páros gráfban  $|A| = |B|$  és az  $A$  osztály minden valódi  $X$  részhalmazára (azaz  $\emptyset \subset X \subset A$ ) teljesül, hogy  $|N(X)| > |X|$ . Igazoljuk, hogy  $G$  tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!
12. Határozzuk meg  $\alpha(G)$ ,  $\tau(G)$ ,  $\nu(G)$ ,  $\rho(G)$  értékét a  $G = K_{n,m}$  teljes páros gráfra!
13. [ppZH 2010. ősz] Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű  $G$  gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a  $\nu(G)$  és a  $\rho(G)$  értéke is megváltozik ennek hatására.
14. A  $V = \{2, 3, \dots, 2007\}$  ponthalmazon definiáljuk a  $G(V, E)$  gráfot úgy, hogy  $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$  ( $a \nmid b$ :  $a$  nem osztója  $b$ -nek)! Van-e  $G$ -ben teljes párosítás?
15. [ppZH 2011. december 14.] Legyen a  $G = (V, E)$  gráf csúcshalmaza  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , élei pedig  $E = \{v_i v_j : \frac{i+j}{i-j} \in \mathbb{Z}\}$ . Határozzuk meg a  $\nu(G)$ ,  $\tau(G)$ ,  $\alpha(G)$ ,  $\rho(G)$  paramétereket.

16. **[ZH 2009. október 19.]** Legyen  $G$  az a gráf, mely hét darab egyenként 287 pontú teljes gráf pontdiszjunk egyesítése. Határozzuk meg az  $\alpha(G)$ ,  $\tau(G)$ ,  $\rho(G)$ ,  $\nu(G)$  értékeket!
17. **[ppZH 2012. december 12.]** Legyen  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  az egyszerű  $G$  páros gráf egy színosztálya, és tegyük fel, hogy  $d(a_i) > i$  teljesül minden  $1 \leq i \leq n$  esetén. Igazoljuk, hogy  $G$ -ben van  $A$ -t fedő párosítás.
18. Mutassuk meg, hogy ha az  $n$  pontú  $G$  gráfban nincs hurokél és  $\tau(G) = n - 1$ , akkor  $G = K_n$ !
19. Igazoljuk, hogy az  $n$  pontú  $G$  páros gráfban  $\alpha(G) \geq n/2$ !
20. **[ZH 2012. november 22.]** Legyenek  $v_2, v_3, \dots, v_7$  a  $G$  egyszerű gráf csúcsai, és pontosan akkor fusson  $v_i$  és  $v_j$  között él, ha  $i^2 - 1$ -nek és  $j^2 - 1$ -nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le  $G$  egy áttekinthető diagramját, számítsuk ki a  $G$ -ben található független élek ill. független csúcsok maximális számát ( $\nu(G)$ -t és  $\alpha(G)$ -t), valamint a  $G$ -t lefogó pontok ill. élek minimális számát ( $\tau(G)$ -t és  $\rho(G)$ -t).
21. A  $G$  egyszerű gráfnak  $2n$  pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább  $n$ . Határozzuk meg  $\nu(G)$  és  $\rho(G)$  értékét!
22. Legyen egy  $2n$  csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább  $n$ . Mutassuk meg, hogy  $\tau(G) \geq n$ !
23. **[pZH 2010. ősz]** Bizonyítsuk be, hogy ha  $G = (A, B; E)$  páros gráf és  $a \in A, b \in B$  esetén  $d(a) \geq d(b) \geq 1$ , akkor van  $G$ -ben  $A$ -t fedő párosítás.
24. Adott egy  $G$  páros gráf ( $A$  és  $B$  színosztályokkal) és  $G$  minden  $v$  csúcsához egy  $b(v)$  pozitív egész szám. Az a cél, hogy a lehető legtöbb élet kiválasszuk  $G$ -nek úgy, hogy minden  $v$  csúcs legfeljebb  $b(v)$  kiválasztott élnek legyen végpontja. Adjunk hatékony algoritmust ennek a problémának a megoldására. (A feladatban körülírt élhalmazt  $b$ -párosításnak is szokás hívni.)
25. Egy szigeten  $n$  család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet  $n$  egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet,  $n$  mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?
26. **[pZH 2009. november 17.]** Legyenek a  $G$  páros gráf színosztályai  $A$  és  $B$ , és tegyük fel, hogy legfeljebb  $|B|$  él szükséges  $G$  összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az  $A$  színosztályra teljesül a Hall feltétel.
27. Tegyük fel, hogy a  $G$  gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb  $m$  szám, amire teljesül, hogy  $G$ -hez hozzá lehet venni  $m$  (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen  $m$  szám?
28. Egy  $G$  összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy  $G$ -ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)
29. Bizonyítsuk be, hogy  $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$ !  $\Delta(G)$  a  $G$  gráf maximális fokszáma.
30. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes  $G$  gráfban  $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$ !

## Hasznos tudnivalók

- $\alpha(G)$ : független csúcsok maximális száma  $G$ -ben
- $\nu(G)$ : független élek maximális száma  $G$ -ben (maximális párosítás)
- $\rho(G)$ : lefogó élek minimális száma  $G$ -ben (csak akkor értelmezett, ha nincs izolált pont)
- $\tau(G)$ : lefogó csúcsok minimális száma  $G$ -ben
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$ ,  $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Gallai:  $\alpha(G) + \tau(G) = n$ , valamint ha nincs izolált pont, akkor  $\nu(G) + \rho(G) = n$
- König: páros gráfokra!  $\nu(G) = \tau(G)$ ;  $\alpha(G) = \rho(G)$ , ha nincs izolált pont