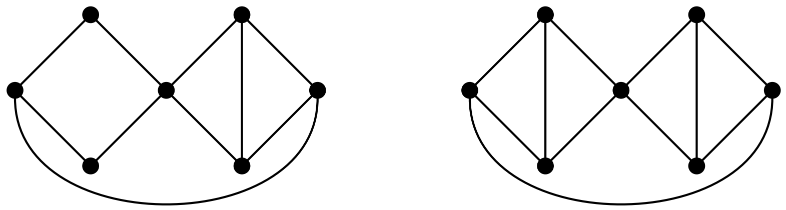
SzA VI. gyakorlat, 2016. október 12.
Körözünk

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **[ZH 2006. március 28.]** Legyen G egy összefüggő gráf, amiben minden pont foka páros. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk G-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta?

2. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?

3. Mutassunk Hamilton-kört a következő gráfokban, vagy lássuk be, hogy nincs!



4. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?

5. Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?

6. Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráf 4-reguláris, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.

---

7. Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leülhetnek egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!

8. Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!

9. **[ZH 2012. november 22.]** Tfh az egyszerű G gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül u és v foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-út.

10. **[pZH 2014. december 8.]** Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös éle.

11. **[ZH 2013. november 28.]** Tudjuk, hogy az $n \geq 20$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $(n+4)/2$. Bizonyítsa be, hogy G -ben van két olyan Hamilton-kör, amelyeknek nincsen közös élük!

12. Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!

13. **[pZH 2011. december 1.]** Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.

14. Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_i p_j \in E(G)) \iff |i-j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út?

15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő $G = (V, E)$ gráfban minden fokszám páros és $X \subseteq V$, akkor X és $V \setminus X$ között páros számú él fut.

16. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk!

17. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G-v$ ill. a $G-e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.

18. Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.

19. (a) Mutassunk olyan $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ élű gráfot (általános n-re), amiben nincs Hamilton-kör!

    (b) Mutassunk meg, hogy bármely, legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+2$ élű gráfban van Hamilton-kör!

20. Egy gráf fokszámai a következők: $10, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 7, 5, 5$. Mutassuk meg, hogy van Hamilton-köre!

21. Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!

22. Mutassuk meg, hogy egy 20 csúcsú, 9-reguláris gráfhoz hozzá tudunk venni 9 élet úgy, hogy az eredményül kapott gráfban legyen Euler-séta!