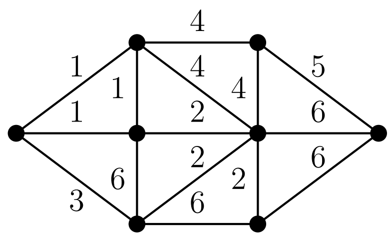
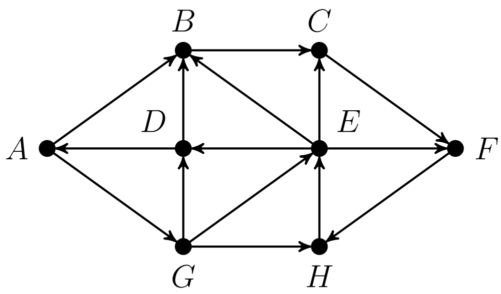
SzA III. gyakorlat, 2016. szeptember 21.
Barátkozás a gráfokkal

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
2. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros, de ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.
3. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?
4. Hány éle van az n pontú egyszerű öf. gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?
5. Igaz-e, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör?
6. Igaz-e, hogy tetszőleges G egyszerű gráf esetén vagy G, vagy a komplementere összefüggő?
7. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
8. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!
9. Mennyi a következő gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van?



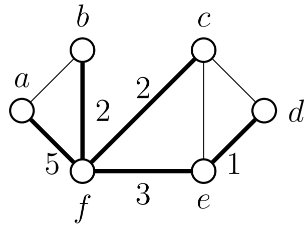
10. Készítsük el a következő gráf szélességi bejárását!



---

11. **[pótZH, 2008. december 5.]** A K_6 gráf minden éléhez kiválasztunk 3 különböző számot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tesszük ezt, lesz két különböző él, amikhez ugyanazt a három számot választottuk.
12. Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai
    (a) $1, 2, 2, 3, 3, 3$?
    (b) $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$?
13. **[pótZH, 2014. december 8.]** Tudjuk, hogy a 6 pontú G gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$. Igazoljuk, hogy G nem egyszerű.
14. Mutassunk két olyan fát, amelyeknek a fokszámai megegyeznek, viszont a két fa mégsem izomorf!
15. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
16. Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?
17. Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!

18. Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak?
19. Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$!
20. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G-nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.
21. Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?
22. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?
23. A G egyszerű gráfnak e olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G-nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.
24. **[ZH, 2011. október 13.]** Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G-nek.



25. Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!
26. A G egyszerű gráfnak $2k$ pontja van, minden pontjának foka legalább $k-1$, és G-nek létezik egy legalább k-adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő!
27. **[pótZH, 2012. november 29.]** Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3 élű részgráfja van G-nek, ami út?
28. Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.
29. **[pótpótZH 2010. ősz]** Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)| - |E(G)|$ komponense van.
30. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.
31. Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.
32. Legyenek e, f és g a G egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő marad, bármely élét is hagyjuk el, ám a $G-e-f$ és a $G-e-g$ gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a $G-f-g$ gráf sem összefüggő!
33. A kormány tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével igen olcsón meg tudná építeni a Rátótot és Piripócsot összekötő vezetéket, ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?
34. Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G-e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek F-fel a lehető legtöbb közös éle van.