# SzA XI. gyakorlat, 2016. november 16.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

$3 + 2 = 1$

1. Határozzuk meg az Euklidészi algoritmussal $lnko(504, 372)$-t! Határozzuk meg $lkkt(504, 372)$-t! Hány osztója van 504-nek?

2. **[PZH 2008. december 5.]** Tudjuk, hogy $n$ és $m$ olyan pozitív egészek, amikre $lnko(n, m) = 10$ és $lkkt(n, m) = 1000$, ahol $lnko(n, m)$ és $lkkt(n, m)$ pedig rendre az $n$ és $m$ legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik. Határozzuk meg az $nm$ szorzatot.

3. $a$ és $b$ páratlan számok, $c = a^2 + b^2$. Mennyi $c$ és 4 legnagyobb közös osztója?

4. Melyek azok a $p$ prímszámok, amelyekre
   (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím?
   (b) $p^2 + 2$ prím?
   (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?

5. Bizonyítsuk be, hogy $39^{14} - 1$ osztható 5-tel!

6. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n$ szám 9-es osztási maradéka megegyezik a 10-es számrendszerben felírt alakjában szereplő számjegyei összegének 9-es maradékával.

7. $8x \equiv 3 \pmod{21}$

8. $9x \equiv 24 \pmod{96}$

9. Ha 10839-et és 11863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?

---

10. $15x \equiv 3 \pmod{18}$

11. $202x \equiv 157 \pmod{203}$

12. $14x - 4 \equiv 80 \pmod{21}$

13. $78x - 15 \equiv 198 \pmod{48}$

---

14. Létezik-e olyan háromjegyű szám, amely osztóinak száma osztható 11-gyel?

15. Bizonyítsuk be, hogy minden $n$ pozitív egész egyértelműen felírható $n = k^2 \cdot l$ alakban, ahol $k$ és $l$ pozitív egészek, továbbá $l$ egyetlen négyzetszám osztója az 1.

16. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen $n$-re nem egyszerűsíthető!

17. $n$ és $m$ pozitív egész számok. Hány olyan pozitív egész szám van, ami legalább az egyiknek osztója?

18. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 osztója van, akkor $n$ nem lehet egy egész szám ötödik hatványa!

19. **[ZH 2002.]** Legyen $k \geq 2$ és jelölje $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legnagyobb közös osztóját, $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ pedig az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legkisebb közös többszörösét. Mutassuk meg, hogy $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot [a_1, a_2, \ldots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ akkor és csak akkor áll fönn minden pozitív egészekből álló szám $k$-asra, ha $k = 2$.

20. Legyen $F_0 = 0, F_1 = 1$, és $n \geq 2$ esetén az $n$-dik Fibonacci szám $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazoljuk, hogy $F_n$ és $F_{n+1}$ relatív prímek.

21. Igazoljuk, hogy tetszőleges 10-es számrendszerben felírt $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ szám 11-es osztási maradéka megegyezik az $a_0 - a_1 + a_2 \dots \pm a_n$ szám 11-es maradékával.

22. Igazoljuk a 7-tel való oszthatóság ellenőrzésére szolgáló alábbi módszer helyességét. Az $n$ szám pontosan akkor osztható 7-tel, ha 7-tel osztható az a szám, amit $n$ tízes számrendszerbeli alakjából úgy kapunk, hogy az utolsó számjegy levágásaval kapott számból levonjuk az utolsó számjegy kétszeresét. Pl. 2002 pontosan akkor osztható 7-tel, ha $200 - 2 \cdot 2 = 196$ osztható 7-tel. Ez pedig igaz, hisz $7 \mid 19 - 2 \cdot 6 = 7$, tehát $7 \mid 2002$.

23. Dzsúlió már régóta gyűjt nagy álmára, hogy volt barátnője, Vanessza mobiltelefonon őrzőtt arcképét a bicepszére tetováltassa. Legjobb barátja, Rodzser tanácsára, míg össze nem jön az ehhez szükséges 35000 forint, átváltja az ezer forintosokban tartott megtakarítását euróra, amit a Rodzser által ajánlott Rikárdótól (az ismeretségre tekintettel) szuperkedvezményes 330 Ft-os árfolyamon vesz meg. Miután Rikárdó centekkel nem foglalkozik, Dzsúliónak éppen 140 Ft marad a megtakarításából, amiből Rodzserrel közösen lottószelvényt vesznek azzal, hogy a nyereményt majd felezik. Hány euró boldog birtokosának mondhatja magát Dzsúlió a sikeres tranzakció után?