SzA I. gyakorlat, 2016. szeptember 7.
Ismerkedés a tárggyal és egymással

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. Igaz-e a következő állítás: Minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak.
2. Mi az alábbi állítások tagadása? (Két állítás akkor tagadása egymásnak, ha közülük minden esetben egy és csak egy igaz)
   (a) Az osztályban minden tanuló lány.
   (b) Bergengóciában minden férfi gazdag vagy nincs felesége (vagy mindkettő).
   (c) Az osztályban van olyan lány, aki magasabb, mint 170cm.
   (d) Bergengóciában van olyan nő, aki gazdag és nincs gyereke.
3. Fogalmazzuk meg az alábbi állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó! „Minden asszony életében van olyan pillanat, hogy szeretne olyat tenni, ami nem szabad."
4. Van két állítás, p és q. Tudjuk, hogy ha p igaz, akkor q is igaz. Következik-e ebből, hogy ha q nem igaz, akkor p sem igaz?
5. Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mondjuk meg minden alábbi állításra, hogy biztosan igaz, lehetséges, vagy biztosan hamis!
   (a) Tudjuk valamiről, hogy nem hömpörő. Azt állítom, hogy ez surjancs.
   (b) Tudjuk valamiről, hogy hömpörő. Azt állítom, hogy ez nem surjancs.
   (c) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez hömpörő.
   (d) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.
   (e) Tudjuk valamiről, hogy surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.
6. Egy érettségi találkozón kiderül, hogy mindenkinek vannak gyerekei. Hogyan tudnánk megcáfolni az alábbi állításokat? Mondjuk meg, hogy milyen bizonyítékot kéne mutatni annak igazolására, hogy ezek az állítások nem igazak (lehetőleg ne használjuk a legfiatalabb, legidősebb szavakat)!
   (a) Mindenkinek a legidősebb gyereke 10 évnél idősebb.
   (b) Mindenkinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél idősebb.
   (c) Valakinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél fiatalabb.
7. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$!
8. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
9. Bizonyítsuk be, hogy az első n páratlan szám összege éppen n^2! Másképp: $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$.
10. Igazoljuk, hogy öt darab, 10-nél nagyobb prím között lenni kell kettőnek, amik különbsége osztható 10-zel!
11. Két kupac gyufánk van, és egy tetszőlegesen nagy gyufautánpótlásunk. A következőképp rakosgatjuk: az egyik kupacból elveszünk valamennyit, a másikba viszont kétszer annyit teszünk. Elérhető-e valamennyi rakosgatás után, hogy ugyanannyi szál gyufa legyen mindkét kupacban, ha eredetileg az egyikben 1, a másikban 2 szál volt?

---

12. Hány részhalmaza van egy n-elemű halmaznak? Hányféle n hosszúságú 0/1 sorozat létezik? Mennyi az olyan 0/1 sorozatok száma, amelyek pontosan k db 1-est tartalmaznak?
13. Ha n focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma?
14. Hányféleképpen ültethető le egy köralakú asztal köré 6 ember? Az elforgatással egymásba vihető leültetéseket nem tekintjük különbözőknek.
15. Hányféleképpen állhat fel 10 fiú és 5 lány egy sorba úgy, hogy két lány ne álljon egymás mellett?

16. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \ldots n$ számoknak, amelyekben a páros és páratlan számok felváltva követik egymást?
17. Hányféleképpen választhatunk ki a $\{-10, -9, -8, \ldots, 10\}$ számok közül 4 különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül úgy, hogy a szorzatuk pozitív legyen?
18. Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötöslottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?
19. Hány olyan tízjegyű szám van, melyben a második számjegy 5-ös? Hány olyan tízjegyű szám van, melyben szerepel az 5-ös számjegy?
20. Hány olyan 10 hosszú dobássorozat van a dobókockával, melyben a dobott számok összege 3-mal osztható?
21. **[ppZH, 2010.]** A Cayley egyetem kombinatorika-kertészet szakának első 3 félévében összesen 18 tárgyat kell elvégezni, minden félévben hatot. Az előtanulmányi rend szerint a *Fák* tárgyat a *Feszítőfák* tárgynál előbb kell felvenni, más megkötés nincs. Hányféleképp lehet felvenni a tárgyakat az egyes félévekben, feltéve, hogy minden felvett tárgyat már az adott félévben sikeresen teljesítenek a hallgatók?
22. Bizonyítsuk be, hogy $\forall n \geq 1$-re $\sum_{i=1}^{n} i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$
23. **[ZH, 2010. október 15.]** A 15 fős képviselőtestület választásra 5 párt állít egy-egy 15 fős listát. A szavazást követően mindegyik párt a listája elejéről az elért eredményének megfelelő számú képviselőt küld a testületbe, úgy, hogy a testület összesen 15 fős legyen. Hányféle lehet a képviselőtestület a szavazás után?
24. **[ZH, 2012. október 11.]** A ruletten egy pörgetés eredménye egy 0 és 36 közötti egész szám (a határokat megengedve). Hányféle olyan 10 pörgetésből álló sorozat lehetséges, ami tartalmaz két azonos eredményű pörgetést?
25. **[pZH, 2012. november 29.]** A villamosmérnök szak mind az 556 hallgatója két-két ZH-t írt: egyet számítástudományból, egyet pedig analízisből. Számítástudományból senki sem ért el 36 pontnál többet. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan hallgató, akik amellett, hogy ugyanannyi pontot kaptak a számítástudomány ZH-jukra, analízisből is egyforma osztályzatot szereztek.
26. Egy 12 fős társaságot egy szálloda két háromágyas és három kétágyas szobájában kell elszállásolni. Hány különböző szobabeosztás lehetséges, ha az azonos számú ágyat tartalmazó szobákat nem különböztetjük meg egymástól?
27. Hányféleképpen helyezhető el 20 különböző zászló 10 számozott zászlórúdra úgy, hogy egy rúdon tetszőlegesen sok zászló lehet (0 és 20 között), és az egyes rudakon a zászlók sorrendje nem számít?
28. 256 bites kulccsal titkosítottam egy macskás videót, majd ezt elküldtem egy ismerősömnek emailben. Legfeljebb mennyi ideig kell próbálkoznia az NSA-nak a megnézéshez, ha feltételezzük, hogy másodpercenként 2^{40} kulcsot tudnak kipróbálni? (Feltesszük, hogy az adott titkosítást nem tudják trükkösen feltörni.)

---

29. Tekintsük a következő $P(n)$ állítást: egy n fantomból álló olyan csoport, amiben van egy skót fantom kizárólag skót fantomokat tartalmaz.

    $P(1)$ triviálisan igaz.

    Most tegyük fel, hogy $P(m)$ igaz valamilyen m-re. Legyen G egy $m+1$ fantomból álló csoport, amiben van egy skót fantom. Jelölje x ezt a skót fantomot. Ha x-hez hozzáveszünk G-ből $m-1$ másik fantomot, akkor az így kapott H csoport egy m fantomból álló csoport lesz, amiben van egy skót fantom. Mivel $P(m)$ igaz, így H-ban csak skót fantomok vannak. Legyen y az a fantom, akit kihagytunk H-ból. y és $m-1$ fantom H-ból egy olyan m tagú K fantomcsoportot alkot, amiben van legalább egy skót fantom, hiszen H-ban csak skót fantomok vannak, így az indukciós feltevést ismét használva biztosak lehetünk benne, hogy y is skót fantom, tehát G kizárólag skót fantomokból áll.

    Hol a hiba? (Ez a gondolatmenet kicsit más megfogalmazásban amúgy a ló-paradoxon, lásd Wikipedia.)