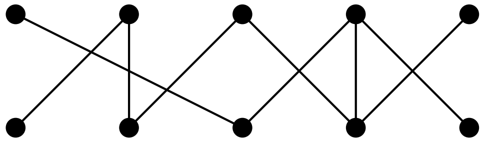
SzA IX. gyakorlat, 2015. november 5.

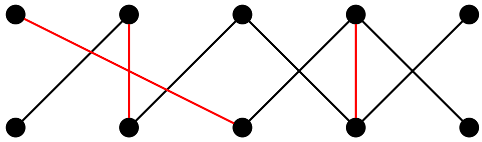
Páros gráfok, görög betűk

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

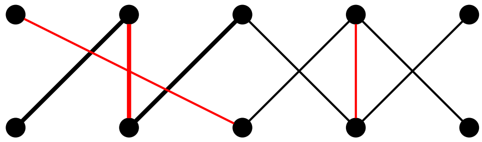
1. **Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban az alternáló utas módszerrel!**



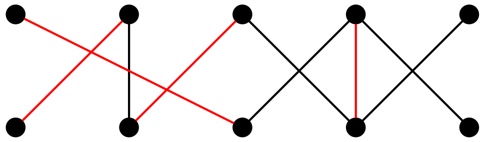
Először tippelünk egy szimpatikus párosítást:



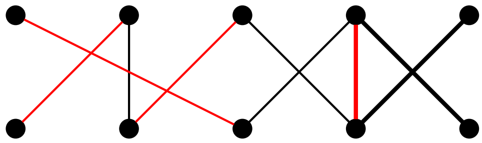
Itt keresünk egy alternáló utat (vastagon):



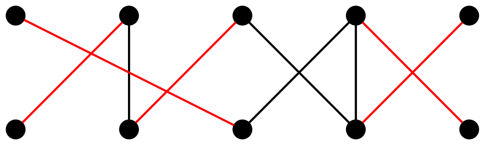
Megcseréljük benne az élek párosítottságát, ezzel növeltük a párosítást:



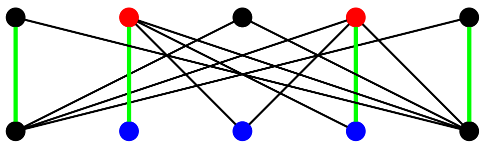
Ezután megint alternáló utat keresünk:



Ezzel egy teljes párosításunk lesz, így biztos, hogy nem kell tovább keresni:



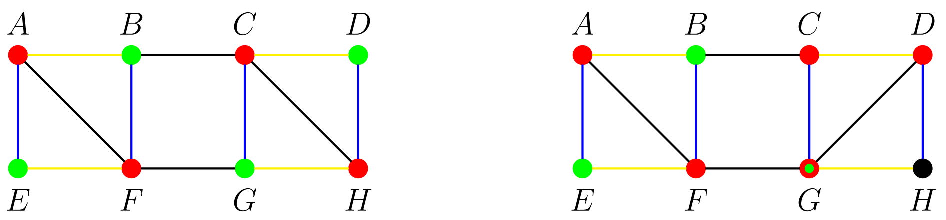
2. **Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!**



A zölddel jelölt élek egy 4 méretű párosítást alkotank. A 3 kékkel jelölt pont szomszédsága csak 2 elemű, így a Hall feltéltel nem teljesül, vagyis teljes (5 méretű) párosításunk nem lehet. Tehát a megtalált párosításunk maximális.

3. **Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!** Válasszunk ki t fiút! Ha $t \leq 6$, akkor már egyiküknek is legalább 6 lányismerőse van. Ha $t \geq 7$, akkor tfh összesen kevesebb, mint t lányt ismernek. Ekkor egy olyan lány fiúismerőseinek száma, akit egyikőjük sem ismer: $12 - t \leq 5$, ami ellentmond a feltételnek. Ezek alapján tetszőleges t fiúnak összesen legalább t lányismerőse van, tehát tudunk adni egy teljes párosítást (Frobenius-tétel).

4. **Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a következő gráfokban, és adjunk hozzájuk megfelelő csúcs- vagy élhalmazokat!**



$\{(A,E),(B,F),(C,G),(D,H)\}$ (kék élek) mindkét gráfban teljes párosítás, így maximális független élhalmaz is, vagyis $\nu(G) = 4$ mindkét esetben.

A bal oldalon $\{A,C,F,H\}$ egy lefogó ponthalmaz, és minimális is, mivel $\tau \geq \nu$. A jobb oldalon $\{A,E,F\}$ és $\{D,G,H\}$ közül egyenként legalább 2, összesen tehát legalább 4 csúcsot ki kell választani, és ekkor még biztos, hogy ki fog maradni él (B,C), így $\tau \geq 5$. $\{A,C,D,F,G\}$ viszont pont jó is. (Piros csúcsok.)

A Gallai tétel használatának feltételei mindkét esetben teljesülnek, vagyis $\alpha(G) = n - \tau(G)$, ami a bal oldalon 4, a jobb oldalon 3; egy-egy lehetséges max független halmaz zölddel jelölve.

Az előzőhöz hasonlóan a Gallai tétel miatt $\rho(G) = n - \nu(G)$, ami 4 mindkét gráfra; egy-egy minimális lefogó élhalmaz sárgával jelölve. (Egyébként itt a kékkel jelöltek is jók lennének – gondoljunk bele, hogy ha egy gráfban van teljes párosítás, akkor az garantáltan egy minimális lefogó élhalmaz is egyben.)

5. **Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!** A teljes páros gráfban a kisebbik csúcsszámú osztályt lefedő párosítás biztos létezik, ennél nagyobb nem is lehet, így $\nu(G) = \min\{n,m\}$. König tétele értelmében $\nu(G) = \tau(G)$, ezért $\tau(G) = \min\{n,m\}$. Gallai tétele miatt $\alpha(G) = |V| - \tau(G) = (n+m) - \min\{n,m\} = \max\{n,m\}$. Ismét König tétele alapján $\rho(G) = \alpha(G) = \max\{n,m\}$.

6. **A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!** Tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G)$, és egy teljes párosítás esetén $\nu(G) = n/2$. Ebből $678 = \tau(G) \geq \nu(G) = 1000$ ellentmondás, tehát nem lehet a gráfban teljes párosítás.

7. **Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n-1$, akkor $G = K_n$!** Tfh mégsem teljes gráf, vagyis $\exists u,v \in V : (u,v) \notin E$. Ha minden csúcsot beválasztunk u-n és v-n kívül a lefogó pontok közé, akkor több csúcsra már nincs is szükségünk, hiszen az u-ba és v-be futó összes él is le van fogva a másik végpontja által (és természetesen a gráf összes többi éle is), ezt csak egy u-hoz vagy v-hez tartozó hurokél tudná elrontani, ami nincs. Így kiderült, hogy $\tau(G) \leq n-2$, ami ellentmond a feltételnek.

8. **Igazoljuk, hogy $\tau(G) \leq 2\nu(G)$ teljesül tetszőleges hurokélmentes G gráfra. (Továbbá $\tau(G) - \nu(G) < \frac{n}{2}$ is. :P)**

Ha egy maximális párosítás minden élének mindkét végpontját lefogjuk (ez pontosan $2\nu(G)$ pont), akkor biztosan lefogtuk az összes élet. Tfh ugyanis, hogy van még „lefogatlan" él: ez nem csatlakozhat semelyik max párosításbeli élhez, vagyis ftln azoktól, vagyis ezzel kiegészíthetnénk a max párosítást, ami pedig lehetetlen.

Mivel $2\nu(G)$ ponttal lefogtuk az összes élet, a lefogó pontok minimális száma ennél nagyobb garantáltan nem lehet.

Továbbá: az előző eredményt, valamint az ismert $\nu(G) \leq \frac{n}{2}$ összefüggést felhasználva:

$$\tau(G) \leq 2\nu(G) = \nu(G) + \nu(G) \leq \nu(G) + \frac{n}{2}$$

Ez már majdnem kész, csak $\leq$ van $<$ helyett. Az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $\nu(G) = \frac{n}{2}$, azaz egy teljes párosításunk van; továbbá minden egyszerű gráfra igaz, hogy $\tau(G) \leq n-1$. Ezeket összerakva látszik, hogy egyenlőség végig nem állhat fenn, tehát

$$\tau(G) < \nu(G) + \frac{n}{2},$$

amiből átrendezéssel adódik a bizonyítandó állítás.

9. **A G gráf egyszerű, összefüggő, 100 csúcsa van és van benne 25 élű párosítás. Igazoljuk, hogy $\omega(\overline{G}) \leq 75$.**
Vegyük észre, hogy bármely $X \subseteq G$ ponthalmaz akkor és csak akkor független G egyszerű gráfban, ha klikket alkot $\overline{G}$-ben. Ebből következően $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$ bármely egyszerű gráfra.

Mivel a gráfban van 25 élű párosítás, $\nu(G) \geq 25$, valamint tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G)$.

A Gallai tétel feltételei teljesülnek, így $\alpha(G) = n - \tau(G)$ igaz. Az eddigieket összerakva (a $-$ előjel miatt figyelni kell az egyenlőtlenségek irányára):

$$\omega(\overline{G}) = \alpha(G) = n - \tau(G) \leq n - \nu(G) \leq n - 25 = 75.$$

10. **Adott egy G páros gráf (A és B színosztályokkal) és G minden v csúcsához egy $b(v)$ pozitív egész szám. Az a cél, hogy a lehető legtöbb élét kiválasszuk G-nek úgy, hogy minden v csúcs legfeljebb $b(v)$ kiválasztott élnek legyen végpontja. Adjunk hatékony algoritmust ennek a problémának a megoldására. (A feladatban körülírt élhalmazt b-párosításnak is szokás hívni.)**
Bevezetjük az s és t terminálokat, s-ből minden A-beli csúcsba, ill. minden B-beli csúcsból t-be irányított élt vezetünk. Ezen élek kapacitása $b(v)$ lesz az adott v-re, G éleinek egységnyi kapacitást adunk, és A-tól B felé irányítjuk azokat. Az így kapott hálózatban egy tetszőleges egészfolyam nagysága megegyezik azon G-beli élek számával, amelyeken egységnyi folyam folyik, és ezen élek b-párosítást alkotnak. Ráadásul minden b-párosításból készíthető a párosítás méretével megegyező nagyságú folyam. Szóval maximális nagyságú egészfolyamot keresünk, azt meg tanultuk, hogy kell.

---

11. **G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?**
Igaz, mert egy páros gráfban minden kör páros hosszú, így egy Hamilton kör is, aminek minden második éle pont egy teljes párosítást ad. Megfordítva nem igaz, pl. egy $2k$ csúcsú páros gráfban, ahol minden pont foka 1, van teljes párosítás, de Hamilton-kör biztos nincs.

12. **[ZH 2010. október 15.] Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?**
Ha i és j között él fut, akkor i és j közül pontosan az egyik páros, a másik páratlan. (3 pont)
Ez azt jelenti, hogy se két páros szám, se két páratlan szám között nem futhat él, (3 pont)
így G valóban páros: a színosztályokat a 100-nál nem nagyobb páros ill. páratlan pozitív egészek

alkotják. (4 pont)

Meg lehet persze másképp is oldani.
Sosem fut él két csúcs között akkor, ha azok 4-gyel osztva ugyanannyi maradékot adnak. (2 pont)
Két különböző maradékosztály között pedig csak akkor futhat él, ha a maradékok különbsége 1 vagy a 0-ás és a 3-as maradékosztályról van szó. (2 pont)
A G gráf tehát páros, hiszen az 1-es és 3-as ill. a 2-es és 0-ás maradékosztály között nem vezet él, és ezek adják a színosztályokat. (6 pont)

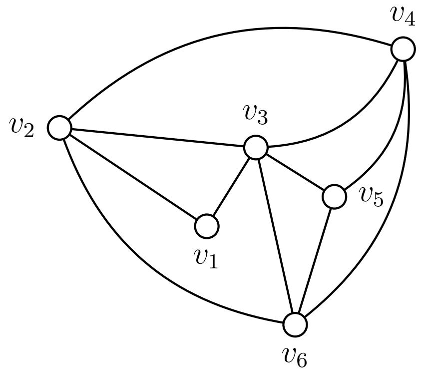
13. **A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!**
Hagyjuk el a kiválasztott élet a hozzátartozó csúcsokkal együtt! Az így keletkező gráfban minden szomszédság legfeljebb egy elemmel csökken, így $|N'(X)| \geq |N(X)| - 1 \geq |X|$ tetszőleges $X \subseteq A$-ra, kihasználva, hogy $|N(X)| > |X|$. A módosított gráfban a Frobenius-tétel szerint tehát van teljes párosítás, ehhez pedig hozzávehetjük az eredetileg választott élet, amivel már az eredeti gráfban is teljes párosításunk lesz.

14. **[ppZH 2010. ősz] Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű G gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a $\nu(G)$ és a $\rho(G)$ értéke is megváltozik ennek hatására.**
Gallai idevágó tétele szerint ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$. (3 pont)
Ennek megfelelően ha olyan 10 pontú gráfot találunk, aminek nincs izolált pontja, és amihez úgy lehet egy élt hozzáadni, hogy a $\nu(G)$ megváltozzon, akkor $\rho(G)$ is változni fog, tehát teljesülni fog a feladatban leírt tulajdonság. (3 pont)
Ilyen gráf pl. a 10 pontú csillag (az a 10 csúcsú fa, aminek 9 levele van), mert ebben a gráfban $\nu = 1$, de tetszőleges újabb élt behúzva $\nu = 2$ lesz. (4 pont)

Természetesen az is tökéletes megoldás, hogy egy konkrét gráfról és hozzáadott élről konkrétan megmutatjuk (Gallai nélkül), hogy a ν és a ρ is változik.

15. **A $V = \{2, 3, \ldots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$ ($a \nmid b$: a nem osztója b-nek)! Van-e G-ben teljes párosítás?**
Igen, van. A szomszédos számok relatív prímek, így fut közöttük él. A $(2, 3), (4, 5) \ldots (2006, 2007)$ pont egy teljes párosítás lesz.

16. **[ppZH 2011. december 14.] Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_iv_j : \frac{i+j}{i-j} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereket.**
A mellékelt ábrán látható a kérdésben szereplő gráf egy diagramja. (3 pont)



Mivel G-ben sem izolált pont, sem hurokél nincs, ezért Gallai tételei miatt $\nu(G) + \rho(G) = \alpha(G) + \tau(G) = 6$. (1 pont)

Mivel v_1v_2, v_3v_5 és v_4v_6 teljes párosítást alkot, ezért $\nu(G) = 3$ (2 pont)
és (Gallai miatt) $\rho(G) = 3$. (1 pont)
Másrészt a v_1, v_2 ill. a v_3, v_4, v_5, v_6 pontok klikket alkotnak, így egy független ponthalmaz közülük legfeljebb egyet-egyet tartalmazhat. Ezek szerint $\alpha(G) \le 2$. (1 pont)
Mivel $\{v_1, v_5\}$ független ponthalmaz, ezért $\alpha(G) = 2$, (1 pont)
így Gallai miatt $\tau(G) = 4$. (1 pont)

17. **[ZH 2009. október 19.] Legyen G az a gráf, mely hét darab egyenként 287 pontú teljes gráf pontdiszjunk egyesítése. Határozzuk meg az $\alpha(G), \tau(G), \rho(G), \nu(G)$ értékeket!**
A gráfunk úgy néz ki, hogy egymás mellé lerajzolunk 7 db K_{287}-et. Innen az egyes értékeket elég egy K_{287}-re kiszámolni, majd mindegyiket megszorozni 7-tel (némi indoklás kíséretében). A számok kitalálását mindenkinek a fantáziájára bízom.

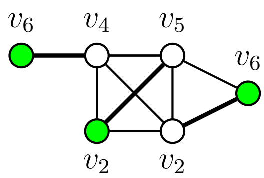
18. **[ppZH 2012. december 12.] Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ az egyszerű G páros gráf egy színosztálya, és tegyük fel, hogy $d(a_i) > i$ teljesül minden $1 \le i \le n$ esetén. Igazoljuk, hogy G-ben van A-t fedő párosítás.**
A Hall feltétel szerint pontosan akkor van A-t fedő párosítás G-ben, ha az A tetszőleges X részhalmazára $|X| \le |N(X)|$ teljesül. (3 pont)
Legyen tehát $X \subseteq A$, tegyük fel, hogy $|X| = k$. Ekkor van X-nek olyan a_i eleme, amire $i \ge k$ teljesül, hisz ha nem volna ilyen, akkor X-nek legfeljebb csak $k-1$ eleme lehetne. (3 pont)
Márpedig $|N(X)| \ge d(a_i) \ge i \ge k = |X|$, tehát a Hall feltétel valóban teljesül, (3 pont)
van G-nek A-t fedő párosítása. (1 pont)

Avagy:

Az a feladatunk, hogy A minden a_i csúcsának találjunk egy-egy páronként különböző szomszédot. (1 pont)
Ezt mohón végezzük, sorra keresünk szomszédot az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ csúcsoknak. (2 pont)
Mivel $d(a_1) \ge 1$, ezért a_1-nek található pár. (1 pont)
Ha már találtunk párt az $a_1, a_2, \ldots, a_i$ csúcsoknak, akkor a_{i+1} szomszédai közül legfeljebb i olyan van, amit nem választhatunk a_{i+1} szomszédjának. (2 pont)
Mivel $d(a_{i+1}) \ge i+1$, ezért bizonyosan van a_{i+1}-nek olyan szomszédja, amelyeet még eddig nem választottunk ki korábban. (3 pont)
Azt kaptuk, hogy a mohó sorrendben dolgozva A minden csúcsának találunk párt, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

19. **Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \ge n/2$!**
Egy páros gráfban a két pontosztály közül az egyik csúcsszáma mindig $\ge n/2$. Az egy osztályba tartozó csúcsok között biztos nem megy él, ezért egy osztály összes csúcsa független, és ha a nagyobb csúcsszámú osztályt vesszük, pont az állítást kapjuk.

20. **[ZH 2012. november 22.] Legyenek $v_2, v_3, \ldots, v_7$ a G egyszerű gráf csúcsai, és pontosan akkor fusson v_i és v_j között él, ha i^2-1-nek és j^2-1-nek van 1-nél nagyobb közös osztója. Rajzoljuk le G egy áttekinthető diagramját, számítsuk ki a G-ben található független élek ill. független csúcsok maximális számát ($\nu(G)$-t és $\alpha(G)$-t), valamint a G-t lefogó pontok ill. élek minimális számát ($\tau(G)$-t és $\rho(G)$-t).**



Az ábra a feladatban leírt gráfot mutatja. (3 pont)
Gallai tételei szerint, ha G-ben nincs sem hurokél, sem izolált pont, akkor $\nu(G)+\rho(G) = |V(G)| =$

$\alpha(G) + \tau(G)$. (2 pont)
A vastagon kihúzott élek G egy teljes párosítását alkotják, így $\nu(G) = 3$, (1 pont)
és a Gallai tétel miatt $\rho(G) = 6 - 3 = 3$. (1 pont)
A satírozott 3 csúcs G egy független ponthalmaza, (1 pont)
ráaadásul ennél több független csúcs nincs G-ben, hisz a v_2, v_4, v_5, v_7 csúcsok alkotta klikk 4 csúcsából legfeljebb egy lehet a független ponthalmazban, azaz tetszőleges független ponthalmaz G-nek legalább 3 csúcsát nem tartalmazza. Tehát $\alpha(G) = 3$. (1 pont)
A Gallai tétel miatt $\tau(G) = 6 - 3 = 3$. (1 pont)

21. **A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!**
A Dirac-tétel miatt a gráfban van Hamilton-kör, és mivel páros csúcsa van a gráfnak, a Hamilton-kör minden második élét kiválasztva egy teljes párosítást kapunk, vagyis $\nu(G) = 2n/2 = n$. Gallai tétele szerint pedig (amit nyugodtan alkalmazhatunk, hiszen nem lehet izolált pontja) $\rho(G) = |V| - \nu(G) = 2n - n = n$.

22. **Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!**
Tudjuk, hogy a fentiek miatt $\nu(G) = n$, viszont azt is tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G) = n$.

23. **[pZH 2010. ősz] Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.**
A tanult Hall-tétel szerint pontosan akkor van G-ben A-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-feltétel, (2 pont)
azaz tetszőleges $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$. (1 pont)
Ezt fogjuk tehát ellenőrizni. A feltétel szerint létezik olyan $c \geq 1$ egész szám, amire $d(a) \geq c \geq d(b)$ teljesül minden $a \in A$ és $b \in B$ csúcsra. (1 pont)
Jelölje $E(X)$ az X-ből induló élek halmazát. Világos, hogy $c \cdot |X| \leq |E(X)| \leq c \cdot |N(X)|$, hiszen minden X-beli csúcsból legalább c különböző él indul, míg egy $N(X)$-beli csúcsra pedig legfeljebb c $E(X)$-beli él illeszkedhet. (4 pont)
Mivel $c \neq 0$ ezért bátran leoszthatunk: $|X| \leq |N(X)|$, (1 pont)
azaz teljesül a Hall-feltétel, csakugyan létezik G-ben A-t fedő párosítás. (1 pont)

24. **Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági- és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?**
Definiáljunk egy páros $G(V, M, E)$ gráfot úgy, hogy egyik csúcsosztályba tartoznak a vadászterületek, másikba a mezőgazdasági területek, egy vadász- és mezőgazdasági terület pedig pontosan akkor van összekötve, ha a kettőnek van közös része. Könnyen látszik, hogy pontosan akkor létezik megfelelő területkiosztás, ha G-ben létezik teljes párosítás. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq V$ halmazt! Az ezekhez a csúcsokhoz tartozó összterület $|X|T/n$, ha T a sziget területe. Tfh kevesebb, mint $|X|$ mezőgazdasági területtel van közös területe X-nek. Ez azt jelenti, hogy $|X|T/n$ területet kellene lefedni kevesebb, mint $|X|$ darab T/n méretű területtel, ami nyilvánvalóan lehetetlen. Ezek alapján teljesül a Hall-feltétel, valamint $|V| = |M|$, tehát létezik teljes párosítás.

25. **[pZH 2009. november 17.] Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B, és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltéltel.**
A Hall-feltétel teljesülése az A színosztályra ekvivalens azzal, hogy van A-t lefedő párosítás, vagyis elég azt belátni, hogy $\nu(G) \geq |A|$. A feltétel szebben megfogalmazva azt jelenti, hogy $\rho(G) \leq |B|$ (és nincs izolált pont). Innen használhatjuk a megfelelő Gallai tételt, miszerint $\nu(G) + \rho(G) = n$,

vagyis átrendezés után $\nu(G) = n - \rho(G) = |A| + |B| - \rho(G) \geq |A| + |B| - |B| = |A|$, és mi pont ezt akartunk igazolni.

26. **Tegyük fel, hogy a G gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb m szám, amire teljesül, hogy G-hez hozzá lehet venni m (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?**
A páros körök nem számítanak, bennük biztos, hogy van teljes párosítás. Ha páratlan darab páratlan kör van a gráfban, akkor összesen páratlan sok csúcs van, így ekkor nincs ilyen m szám. Ha páros sok páratlan kör van, akkor mindegyikben csináljunk egy maximális párosítást, így mindegyikben pont egy csúcs fog párosítatlanul maradni. Számozzuk meg ezeket a kimaradt csúcsokat $1 \ldots p$-ig (p legyen a páratlan körök száma), és vegyünk fel éleket így: $(1, 2), (3, 4) \ldots (p - 1, p)$. Így már lesz teljes párosítás, felesleges élet nem vettünk fel, és $m = p/2$.

27. **Egy G összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy G-ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)**
Tfh van egy ilyen tulajdonságú gráfunk, mégis van benne elvágó él. A gráf csúcsainak száma páratlan, mert egy pontot elhagyva egy olyan gráfot kapunk, amiben van teljes párosítás, így páros sok csúcsa van. Nézzünk most egy elvágó élet! Ez az él nyilván két komponensre osztja a gráfot, az egyiknek páros, a másiknak páratlan sok csúcsa van. Hagyjuk most el ennek az élnek azt a csúcsát, amelyik a páros csúcsszámú komponenshez tartozik! A gráf így két összefüggő komponensre esik szét, mindkettőnek páratlan sok csúcsa van. Ebben kellene léteznie teljes párosításnak, de ez lehetetlen, mert ehhez a két komponens között is futnia kellene élnek.

28. **Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$! $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.**
Egy v csúcs pontosan $d(v)$ élet tud lefogni, és ha T egy minimális lefogó csúcshalmaz, akkor
$$\sum_{v \in T} d(v) \geq |E|,$$
hiszen T csúcsai az összes élet lefogják (lehet, hogy egy élet több csúcs is). Ha a bal oldalon a fokszámokat helyettesítjük a maximális fokszámmal, akkor a kifejezés értéke biztos nem csökken, tehát
$$\sum_{v \in T} \Delta(G) \geq \sum_{v \in T} d(v) \geq |E|,$$
viszont itt pontosan $|T| = \tau(G)$-szer adtuk össze $\Delta(G)$-t, vagyis $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$.

29. **Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$!**
Mivel G-ben nincs háromszög, egy tetszőleges csúcs szomszédai egy független halmazt alkotnak. Így bármely fokszám legfeljebb $\alpha(G)$ lehet, azaz $\alpha(G) \geq \Delta(G)$ miatt $\alpha(G)\tau(G) \geq \Delta(G)\tau(G) \geq |E|$ az előző feladat eredményét felhasználva.

Hasznos tudnivalók

- $\alpha(G)$: független csúcsok maximális száma G-ben
- $\nu(G)$: független élek maximális száma G-ben (maximális párosítás)
- $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma G-ben (csak akkor értelmezett, ha nincs izolált pont)
- $\tau(G)$: lefogó csúcsok minimális száma G-ben
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$, $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Gallai: $\alpha(G) + \tau(G) = n$, valamint ha nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$
- König: páros gráfokra! $\nu(G) = \tau(G)$; $\alpha(G) = \rho(G)$, ha nincs izolált pont