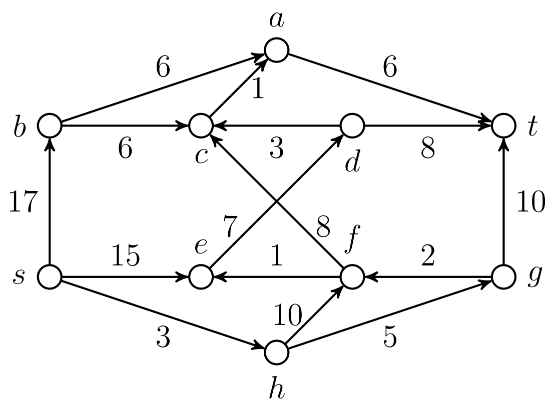
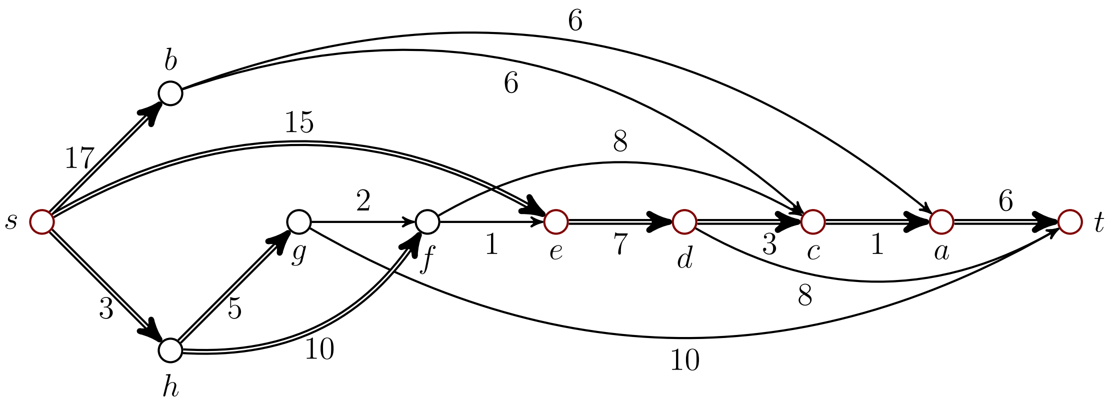
SzA VI. gyakorlat, 2015. október 16.
PERT! Továbbá körözünk, és hurrá, ZH!

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **[ZH 2011. november 24.] Határozzuk meg az ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek!**

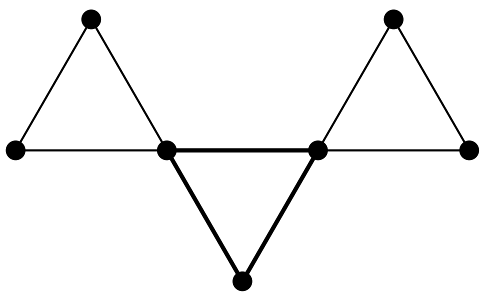


Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk G egy topologikus sorrendjét (emeletekre bontással vagy mélységi bejárással, ahogy jólesik). Lásd az ábrát. (2 pont)
Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)
Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 32$, (1 pont)
és mivel egyetlen kritikus út vezet s-ből t-be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz s, e, d, c, a, t. (2 pont)



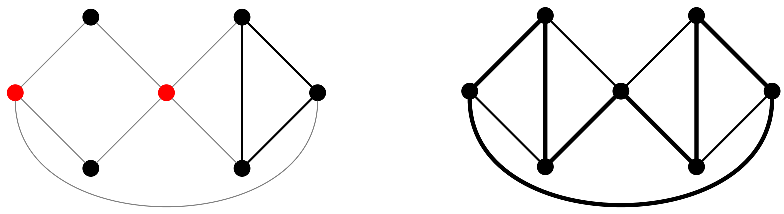
s	b	h	g	f	e	d	c	a	t
0	17	3	8	13	15	22	25	26	32

2. **[ZH 2006. március 28.] Legyen G egy összefüggő gráf, amiben minden pont foka páros. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk G-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta?**
Nem, egy ellenpélda, ami teljesíti a feltételeket, de a vastag élek által alkotott kört elhagyva a gráf mégsem lesz öf:



3. **Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?**
Van, pl egy C_4-et és egy C_3-at egy csúcsuknál összeragasztunk.

4. **Mutassunk Hamilton-kört a következő gráfokban, vagy lássuk be, hogy nincs!**



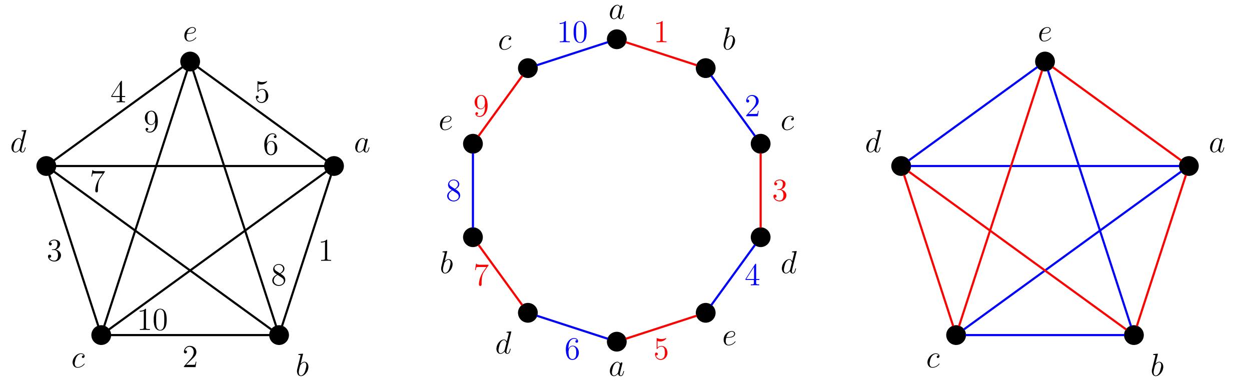
A bal oldaliban pirossal jelölve két csúcs, amiket elhagyva a gráf 3 részre esik szét, vagyis nem lehet benne H-kör. A jobb oldalon pedig vastaggal jelölve egy H-kör.

5. **Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?**
Természetesen 6. 5 nyilván nem elég, C_6 viszont jó is.

6. **Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?**
11 létezik, pl K_5-höz kapcsolva egy éllel egy csúcsot pont ilyet kapunk. 12 él esetén a gráfunk pont 3 éllel tartalmaz kevesebbet, mint K_6. Ha tehát K_6-ból úgy hagyunk el 3 élet, hogy nem mind egy ponthoz kapcsolódik, akkor a fokszámok legfeljebb 2-vel csökkennek, vagyis minden pont foka legalább 3 lesz. Ekkor a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör. Ha az elhagyott 3 él 1 pontra illeszkedett, akkor a fokszámok: $2, 4, 4, 4, 5, 5$. Az Ore-tétel miatt ebben az esetben is van Hamilton-kör.

7. **Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű gráf 4-reguláris, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.**
Ha több komponensből áll, akkor a komponenseket külön, egymástól függetlenül kezelhetjük, így a továbbiakban feltételezzük, hogy a gráf összefüggő. A gráfban így van E-kör, mert minden fokszám páros. Vegyünk egy E-kört, és az éleit felváltva színezzük pirosra és kékre! Ez a színezés helyes lesz. Ezt pl. úgy láthatjuk be, hogy az E-körsétát felrajzoljuk egy valódi körként (az eredeti gráf egy pontja így többször is fog szerepelni: pontosan annyiszor, ahányszor átmentünk rajta). Az eredeti gráf minden pontjába pontosan kétszer mentünk be, így minden pont pontosan kétszer fog szerepelni ezen a körön, de sosem egymás mellett (ez hurokélet jelentene). Azaz minden pontnak pontosan kétszer lesz egy piros és kék éle, vagyis összességében minden pontnak két piros és két kék éle lesz.

A könnyebb megértéshez érdemes megnézni a következő ábrát (az élekre írt számok azt jelentik, hogy hanyadikként haladtunk át az adott élen az E-kör szerint):



8. **Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leülhetnek egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!**
Definiáljunk egy gráfot, amiben minden embernek egy csúcsot feleltetünk meg, és két csúcs akkor van összekötve, ha ismerik egymást. Ha ebben a gráfban találunk Hamilton-kört, akkor a kör mentén le tudjuk őket ültetni. 12 csúcsunk van és minden fokszám legalább 6, így a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör a gráfban, tehát létezik ilyen leültetés.

9. **Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!**
Ha mindenki legalább $n/2$ embert ismer, akkor ez lehetséges ugyanúgy, mint a korábbi feladatban. Ha kevesebb, mint $n/2$-t, akkor vegyük az előbb definiált gráf komplementerét, és az itt talált Hamilton-kör pont egy olyan leültetésnek fog megfelelni, ahol senki nem ismeri a mellette lévőket. A komplementerben már teljesül a Dirac-tétel feltétele, így itt is létezik Hamilton-kör.

10. **Adjunk olyan eljárást, amely tetszőleges PERT probléma esetén minden tevékenységhez meghatározza azt a legkésőbbi időpontot, amikor az adott tevékenységet elkezdve a teljes PERT feladat legrövidebb idő alatti végrehajtása még éppen nem kerül veszélybe.**
Ugyanúgy járunk el mint a PERT-ben, csak a topologikus sorrend fordítottjából indulunk ki, 0 időpontot állítunk be a nyelőnek, és minden csúcsra így egy számot kapunk, ami azt mondja meg, mennyi idő kell még ahhoz, hogy az adott tevékenység kezdésétől befejezzük a projektet. A teljes projekt végrehajtásához szükséges időből levonva ezeket a számokat éppen a keresett időpontokat kapjuk.

11. **[ZH 2012. november 22.] Tfh az egyszerű G gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül u és v foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-út.**
Ore tanult tétele szerint ha egy n pontú egyszerű G gráf bármely két nem szomszédos csúcsának fokszámösszege legalább n, akkor G-nek van Hamilton köre. (3 pont)
Ha tehát u és v szomszédosak, akkor teljesül az Ore tétel, van tehát G-ben Hamilton kör, (2 pont)
ebből egy élt törölve pedig G Hamilton útját kapjuk. (1 pont)
Ha pedig u és v nem szomszédosak, akkor húzzunk be közéjük egy élt, és nevezzük G'-nek a kapott gráfot. (2 pont)
Mivel G'-re már teljesül az Ore feltétel, ezért G'-ben van Hamilton kör, (1 pont)
ami még az uv él törlése után is tartalmazza G egy Hamilton útját. Ezzel mindkét esetben igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)

12. **[pZH 2014. december 8.] Igazoljuk, hogy ha egy egyszerű G gráfnak 20 csúcsa van és bármely fokszáma legalább 12, akkor G-nek van két olyan Hamilton köre, melyeknek nincs közös éle.**
A Dirac-tétel miatt G-nek van egy C Hamilton köre, hiszen G minden fokszáma legalább a pontok számának fele, azaz 10. (3 pont)
Ha most C éleit elhagyjuk G-ből, akkor az így kapott $G - C$ gráfban minden fokszám legalább 10 lesz. (3 pont)
Ismét teljesül tehát a Dirac-feltétel, így Dirac tétele szerint $G - C$-nek is van Hamilton köre, mondjuk C'. (3 pont)
A konstrukció folytán a G gráf C és C' Hamilton köreinek nincs közös éle, ez pedig igazolja a feladatban kimondott állítást. (1 pont)

13. **[ZH 2013. november 28.] Tudjuk, hogy az $n \geq 20$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $(n+4)/2$. Bizonyítsa be, hogy G -ben van két olyan Hamilton-kör, amelyeknek nincsen közös élük!**
Mivel minden fokszám legalább $(n+4)/2 > n/2$, a Dirac tétel szerint G-ben van Hamilton kör. (2 pont)
Hagyjuk el G-ből ennek a Hamilton körnek az éleit. (2 pont)
Ezzel minden pont foka pontosan 2-vel csökken. (2 pont)
Tehát a megmaradt gráfban minden fokszám legalább $(n+4)/2 - 2 = n/2$, vagyis továbbra is teljesül a Dirac feltétel, találhatunk egy újabb Hamilton kört. (3 pont)
Ez természtesen éldiszjunkt az előzőtől (1 pont)

14. **Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!**
Vegyünk a gráfhoz egy pontot, ahonnan húzzunk éleket az összes eredeti pontba. Az új gráf csúcsainak száma $2k+2$, a fokszámok pedig eggyel növekedtek (az új pont foka $2k+1$), így mindegyik legalább $k+1$. A Dirac-tétel szerint ebben a gráfban van Hamilton-kör, ami biztos átmegy az új csúcson is. Ha ezt a csúcsot az éleivel elhagyjuk, akkor a Hamilton-kör „maradéka" pont egy Hamilton-út lesz az eredeti gráfban.

15. **[pZH 2011. december 1.] Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.**
Tanultuk, hogy összefüggő gráfnak pontosan akkor van Euler-köre, ha minden fokszáma páros. (1 pont)
Ezek szerint G-ben minden fokszám páros. (2 pont)
A $\bar{G}$ komplementergráfban a v csúcs foka $d_{\bar{G}}(v) = 98 - d_G(v)$, (2 pont)
ezért $\bar{G}$-ben is páros lesz minden csúcs foka. (2 pont)
Egyedül annak igazolása van hátra, hogy $\bar{G}$ összefüggő. Ez következik pl. a Dirac-tételből, hiszen $\bar{G}$-ben minden fok legalább $98 - 30 = 68 > \frac{99}{2}$. (3 pont)

Az utolsó 3 pont úgy is megszerezhető, hogy ha a $\bar{G}$-beli minimális fokszám több, mint $\frac{n}{2}$ (márpedig ez igaz), akkor bármely két nem szomszédos pontnak van közös szomszédja, és ebből azonnal következik az öf tulajdonság.

Megjegyzés (DM): a gráfokkal való ismerkedéskor is szép részletesen bizonyítottuk gyakorlaton, hogy ha minden fokszám legalább $n/2$, akkor a gráf összefüggő.

16. **Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_i p_j \in E(G)) \iff |i-j| \leq 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út?**
G öf, de a 2 és a 2000 csúcsok foka 3. A többié ps. Szóval nincs Euler-körséta, de van Euler-séta. Könnyű Hamilton-kört is gyártani: oda a páratlanokon, vissza a párosakon jövünk.

17. **Bizonyítsuk be, hogy ha egy összefüggő $G = (V, E)$ gráfban minden fokszám páros és $X \subseteq V$, akkor X és $V \setminus X$ között páros számú él fut.**
A feltételek alapján a gráfban van Euler-körséta. Indítsuk ezt a körsétát X-ből! Ekkor biztos, hogy az X és $V \setminus X$ közötti összes élen is át fog menni, valamint pontosan annyiszor fog X-ből $V \setminus X$-be menni, mint amennyiszer vissza (különben nem fejeződhetne be X-ben). Azaz minden „oda" élnek van egy „vissza" párja, vagyis valóban párosan vannak.

Egy másik, Euler nélküli bizonyítás: tfh páratlan ilyen él van. X-et húzzuk össze egy x pontba, és minden, $V \setminus X$-be menő élet ebbe a pontba kössünk be. Ekkor ennek a pontnak a fokszáma páratlan, míg az összes többié páros – azaz páratlan darab páratlan fokú pontunk van, ilyen gráf pedig nem létezhet.

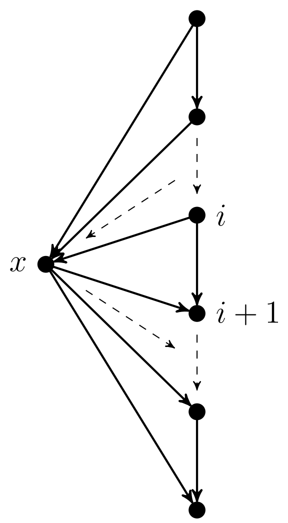
18. **Bizonyítsuk be, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk!**

A 3-reguláris gráfnak ps sok csúcsa van a fokszámösszeg párossága miatt. A Hamilton kör élei ezért piros-fehérre színezhetők, a kimaradók lesznek a zöldek.

19. **Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G - v$ ill. a $G - e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.**
Észrevesszük, hogy a gráfot lecsupaszíthatjuk addig, amíg csak a H-kör marad meg (azaz töröljük a H-körön kívüli éleket) – ettől legfeljebb széteshetne a gráf. Viszont a H-körre már önmagában is igaz, hogy se éltörléstől, se csúcstörléstől nem esik szét.

20. **Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.**
Tfh nem igaz, azaz K nem H-kör. Ekkor van olyan e él K valamelyik v csúcsából, ami K-n kívüli csúcsba fut (az összefüggőség és K nem H-körsége miatt). Töröljük az egyik v-re illeszkedő élet K-ban (így lesz egy $k-1$ hosszú utunk, ami a feltétel szerint a leghosszabb). Ezt kiegészítve e-vel egy k hosszú utat kapunk, ami ellentmondás.

21. **Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!**
Teljes indukcióval. $n = 1$ csúcs esetén triviálisan igaz. Tfh valamilyen n-re igaz, vizsgáljuk meg $n + 1$-re! Az $n + 1$ csúcsú teljes gráfból elhagyva egy tetszőleges x pontot egy n csúcsút kapunk, amiben az indukciós feltétel miatt van irányított H-út. Ha x-ből pont ezen H út elejére mutat él, vagy a H-út végéből pont x-be mutat él, akkor x-et a H-út elejére vagy végére téve pont egy jó irányított H-utunk lesz. Baj csak akkor van, ha az ábrán látható eset áll elő. Ekkor viszont biztos van az úton olyan i csúcs, hogy i-ből x-be mutat él, és x-ből $i + 1$-be (ha nem így lenne, akkor a már kezelt esetek egyikét kapnánk). Ide beillesztve x-et egy jó H-utat kapunk.



---

22. **Van b darab borítékunk, az i-ediknek a hossza h_i, a magassága m_i. Az i-edik borítékba akkor tudjuk berakni a j-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Célunk, hogy minél hosszabb olyan láncot alakítsunk ki, hogy az i-edikben benne van a j-edik, abban a k-adik, stb.**

Legyen adott egy $L > 0$ egész és a h_i és m_i számok. Hogyan lehet eldönteni, hogy kialakítható-e a borítékokból egy L hosszú lánc?
Építünk egy gráfot, melynek csúcsai a borítékok, és i csúcsból pontosan akkor megy él j-be, ha a j boríték belerakható i-be. Ekkor egy irányított út a gráfban megfelel egy helyes borítékláncnak, továbbá egy helyes borítéklánc mindig felírható egy irányított útként a gráfban. Ez a gráf DAG, hiszen ha lenne benne irányított kör, akkor ez azt jelentené, hogy valamely boríték belefér saját magába.

Innen már látszik, hogy ebben a gráfban leghosszabb utat kell keresni, és ha ez legalább L hosszú, akkor van ilyen lánc (és meg is találtuk), egyébként nincs.

23. **Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i-edik gép üzenetet küld a j-ediknek (i, j, t) formában feljegyezünk, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i-edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j-edik gép mefertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t + 1$ időponttól kezdve már a j-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszú listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x-edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y-adik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjunk algoritmust, ami ezt a kérdést megválaszolja!**
Vegyünk fel egy gráfot, csúcsai a számítógépek minden időpillanatban t_0 és t_1 között, élei (irányítottak) az üzenetek. Vegyünk fel még éleket az ugyanahhoz a géphez tartozó szomszédos időpontok között is előrefele! Ebben a gráfban az x gépből pontosan azok érhetők el irányított úton, akik lehetnek vírusosak (ezt kicsit érdemes indokolni). Így x-ből egy bejárást indítva megtaláljuk a kérdéses gépeket.