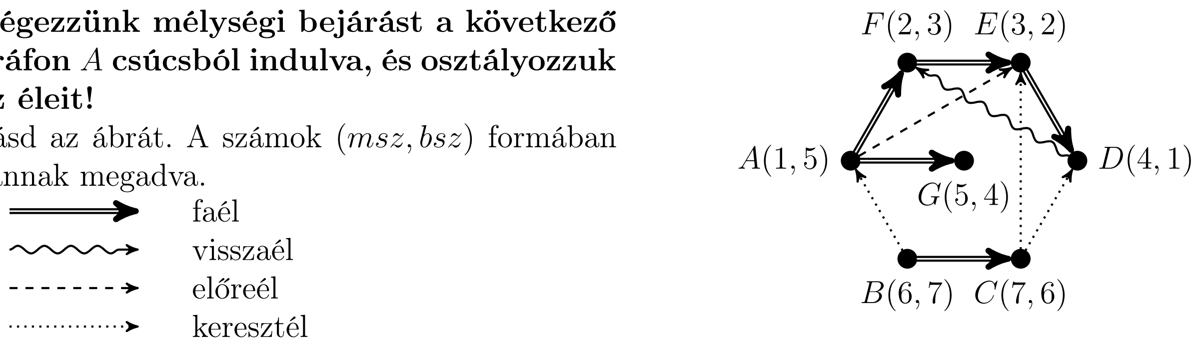
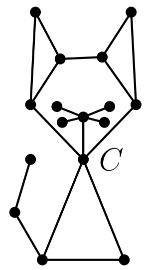
Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Végezzünk mélységi bejárást a következő gráfon A csúcsból indulva, és osztályozzuk az éleit!**
   Lásd az ábrát. A számok (msz, bsz) formában vannak megadva.

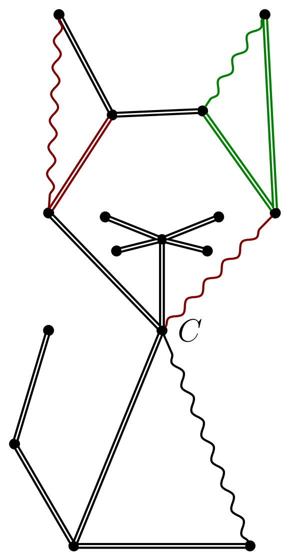


Megjegyzés: mikor elakadtunk, akkor véletlenszrűen választottunk egy még nem bejárt csúcsot, ahonnan folytattuk a bejárást. Az véletlen, hogy ebben a példában keresztélek csak a két fa között mennek, például ha lenne (G, F) élünk, az is keresztél lenne.

2. **Határozzunk meg egy alapkörrendszert és fundamentális vágásrendszert a következő gráfban úgy, hogy a C pontból indulva készítünk egy mélységi feszítőfát!**



Egy lehetséges bejárás eredménye látható a következő ábrán. Minden egyes visszaél meghatároz egy alapkört, példaként zöldesen megjelölve egy. Az összes alapkör együtt alkotja az alapkörrendszert. Továbbá minden egyes faél meghatároz egy fundamentális vágást (azokkal a visszaélekkel együtt – ha esetleg vannak ilyenek –, akik az adott ágban „mellette” futnak), példaként pirosasan megjelölve egy. Az összes fundamentális vágás együtt alkotja a fundamentális vágásrendszert (ebben a példában egész sok fundamentális vágásunk van).



3. **Legyen G DAG, és tegyük fel, hogy az u és v csúcsok között egyik irányban sincs irányított út G-ben. Mutassuk meg, hogy G-nek van olyat topologikus sorrendje, amelyben u megelőzi v-t, és olyan is, amelyben v előzi meg u-t.**
   A mélységi bejárás segítségével az órán tanultak szerint tudunk topologikus sorrendet meghatározni. Amennyiben u-ból indítjuk a bejárást, akkor v előbb fog szerepelni, mint u, ha pedig v-ből,

akkor pont fordítva. Mivel mindkét esetben egy helyes topologikus sorrendet kapunk, az állítást ezzel igazoltuk.

4. **Egy falutörténet írója n korábbi lakosról gyűjtött információkat. A kérdésekre kapott válaszok a következő típusúak voltak:**

   - **S_i személy meghalt S_j születése előtt;**
   - **S_i személy élete során született S_j;**
   - **S_i személy korábban született, mint S_j;**
   - **S_i korábban halt meg, mint S_j.**

   Egy S_i, S_j párra nem biztos, hogy szerepel minden választípus, és olyan pár is lehet, amely egyetlen válaszban sem szerepel együtt. Mivel az emberek időnként rosszul emlékeznek, nem biztos, hogy minden kapott információ helyes. Adjunk algoritmust, amivel k db fenti típusú válaszról $c \cdot (n+k)$ lépésben eldönthető, hogy van-e közöttük ellentmondás.
   Vegyünk fel egy $2n$ csúcsú gráfot, ahol az egyes csúcsok adott személy születésének és halálának felelnek meg (S_i-re $v_{i,sz}$ és $v_{i,h}$). A gráf élei jelentik az időbeli megelőzést, azaz v_k-ból v_l-be futó él azt jelenti, hogy v_k esemény v_l előtt történt. A születési és halál csúcsokat személyenként értelemszerűen összekötjük. A többi él az információkból jön, pl. S_i *személy élete során született* S_j esetén egy $(v_{i,sz}, v_{j,sz})$ és $(v_{j,sz}, v_{i,h})$ élet húzunk be (a többi is értelemszerűen). Az információkban pontosan akkor nincs ellentmondás, ha a gráf DAG (egyik irány: ha lenne ellentmondás, akkor az irányított kört jelentene a gráfban; másik irány: ha kör van a gráfban, az egy esemény saját maga előtti bekövetkeztét jelenti, azaz ellentmondás). $|V| = 2n$, $|E| \le c \cdot (n+2k)$ („élet” élek és állításonként legfeljebb két él), DAG-ság eldöntése mélységi bejárással $c \cdot (|V| + |E|) \le c' \cdot (n+k)$ (alkalmas c' választással).

---

5. **G egy összefüggő, irányított gráf, melynek van olyan mélységi bejárása, amelynek során keletkezett feszítőerdő csupa izolált pontból áll. Az ilyen n pontú gráfok közül hogy néz ki a minimális, illetve a maximális élszámú?**
   Összefüggőség miatt fánál kevesebb él nem jöhet szóba, az $n-1$ hosszú út (a bejárás során „visszafele” haladva) pont jó. A maximális élszámúhoz meg kell gondolni, hogy DAG-nak kell lennie (irányított kör elrontaná az izoláltságot minden bejárásnál, ugyanis lenne visszaél, lásd tétel), tehát írjuk fel a topologikus sorrendben a pontokat, és ha minden lehetséges előrefele mutató élet behúzunk (azaz az i csúcsból vezet irányított él minden $i+1 \dots n$ csúcsba), akkor még pont jók vagyunk, többet a minden lehetségesnél meg nem tudunk behúzni.

6. **[pZH 2010. ősz] Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \dots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \le i \le 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \le j \le 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű, irányítatlan gráf v_1-ből indított mélységi (DFS) bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?**
   Tanították, hogy a mélységi bejárás fájához nem tartoznak keresztélek (*megjegyzés, DM: irányítatlan gráf!*), azaz olyan élek, amik a fa olyan csúcsait kötik össze, amik nem leszármazottai egymásnak. (3 pont)
   Ezek szerint G-ben nem futhat él a $v_6, v_7, \dots, v_{10}$ pontok között. (2 pont)
   A G gráfnak tehát nem lehet több éle, mint annak a gráfnak, amit 10 pontú teljes gráfból úgy kapunk, hogy elhagyjuk a fenti 5 pont közt futó éleket. (2 pont)
   Az élszám tehát legfeljebb $\binom{10}{2} - \binom{5}{2} = 45 - 10 = 35$ lehet. (1 pont)
   Ennyi éle pedig lehet is G-nek. Ha ugyanis G pontosan a fent leírt gráf, akkor a megadott F lehet a G mélységi fája. (2 pont)

   A fa helyes lerajzolásáért adjunk 1 pontot, ha nincs más értékelhető teljesítmény.

7. **[ppZH 2014. ősz] Igaz-e, hogy ha egy n csúcsú, aciklikus, irányított G gráfban van egy $n-1$ élű irányított út, akkor G csúcsainak pontosan egy topologikus sorrendje van?**
   Mivel G acilkikus, ezért az órán tanultak miatt van topologikus sorrendje, szám szerint legalább egy. (1 pont)
   Megmutatjuk, hogy G-nek nem lehet több topologikus sorrendje, és ezzel igazoljuk a feladatbeli kérdésre adott igenlő válasz helyességét. (1 pont)
   A kérdéses irányított út G minden csúcsát tartalmazza. (1 pont)
   Mivel az út kiindulópontja kivételével minden más csúcsba vezet él (már az úton is), ezért a topologikus sorrend első csúcsa (amelybe nem vezthet él) csakis ez a csúcs lehet. (3 pont)
   A topologikus sorrendben második csúcsba csakis a topologikus első csúcsából vezethet él, ezért a topologikus sorrend második csúcsa csakis az úton másodiknak érintett csúcs lehet. Hasonló érvelés mutatja, hogy minden $1 \leq i \leq n$ esetén a topologikus sorrend i-edik csúcsa csakis az $n-1$ élű út i-dik csúcsa lehet. (3 pont)
   Tehát G-nek csak egy topologikus sorrendje lehet, és mint láttuk van is egy. (1 pont)

8. **[pZH 2013. december 6.] A G irányított gráfban van olyan él, aminek az elhagyásával a maradékban nincs irányított kör. Igaz-e, hogy a mélységi bejárás során biztosan nem lehet egynél több visszaél?**
   Legyenek a G csúcsai x, y, z, irányított élei xy, yz, zy, zx. (4 pont)
   Ha elhagyjuk az yz élet, akkor nem lesz irányított kör. (Emeletekre bontható: z, x, y.) (3 pont)
   Ugyanakkor, ha x-ből indítunk egy mélységi bejárást, akkor a mélységi fa élei az xy és yz lesznek, két visszaél is van, zy és zx. (3 pont)

9. **Tekintsük az olyan G irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan G' gráf összefüggő. A G gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, amelyre a mélységi és a befejezési szám megegyezik?**
   n, ilyen például egy irányított út, ahol pont az iránnyal ellentétesen vesszük a csúcsokat. Több nem lehet, hiszen n csúcsa van a gráfnak.

10. **Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ irányított gráf felbontható két DAG-ra; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok DAG-ok!**
    Indukcióval a pontszámra. $n = 1$-re triviálisan igaz. Tfh n-re igaz, kérdés, hogy igaz-e $n+1$ pontra? Ha van egy $n+1$ pontú irányított gráfunk, akkor véletlenszerűen válasszuk ki egy pontját. A maradék n az indukciós feltevés szerint felbontható megfelően két DAG-ra (persze simán lehet, hogy az egyik, másik, vagy mindkettő akár 0 élet tartalmaz, de ez minket nem zavar), ezeknek van egy topologikus sorrendje. Az $n+1$-edik pont bejövő éleit rendeljük az egyik DAG-hoz, ettől az DAG marad (a topologikus sorrendben az aktuális lesz az utolsó pont, a többit nem zavarja), a kimenő éleket pedig a másik DAG-hoz (hasonlóan az is DAG marad). Így az állítást igazoltuk (és mellesleg a bizonyításunk konstruktív is, azaz ez alapján tényleg tudunk csinálni egy ilyen felbontást).

    Egy másik lehetséges, szintén konstruktív bizonyítás: számozzuk meg a pontokat egyedileg 1-től n-ig. Minden $e = (i, j)$ élről egyenként eldöntjük, hogy E_1-be vagy E_2-be tartozzon. Ezt tegyük úgy, hogy $i < j$ esetén e-t E_1-hez, $i > j$ esetén E_2-höz rendeljük ($i = j$ nem lehetséges). G_1 jó topologikus sorrendje $1, \ldots, n$, így az ismert tétel miatt G_1 DAG. Hasonlóan, G_2 jó topologikus sorrendje $n, \ldots, 1$, így ez is DAG.