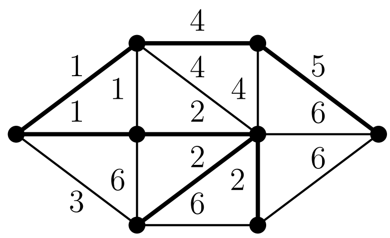
SzA III. gyakorlat, 2015. szeptember 25.
Feszítünk, utazunk

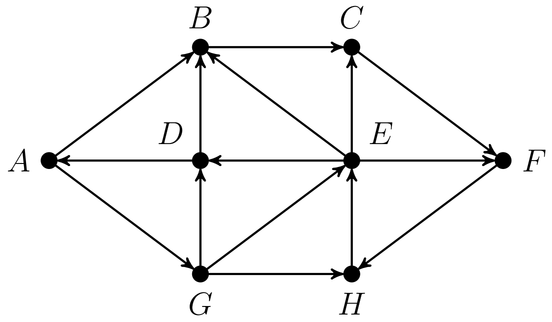
Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Mennyi a következő gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van?**

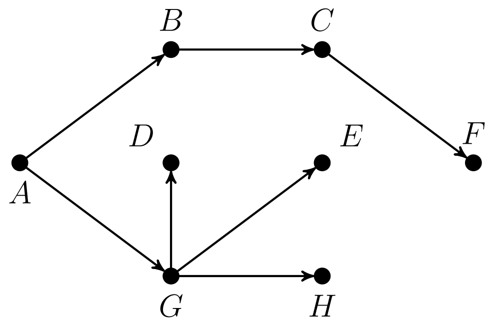


Egy lehetséges megoldás az ábrán jelölve. A 3 darab 1 súlyú élek közül pontosan bármelyik kettőt kell választani, és két 4 súlyú él közül pontosan 1-et kell választani. Más választási lehetőség nincs, ezek viszont függetlenek. Így a lehetőségek száma: $\binom{3}{2}\binom{2}{1}$.

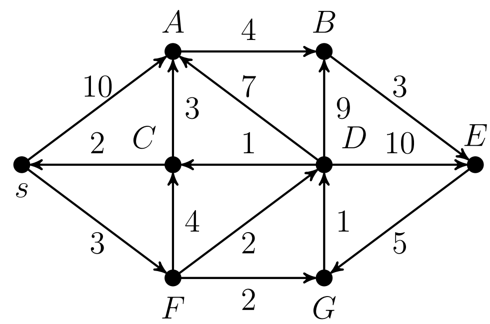
2. **Készítsük el a következő gráf szélességi bejárását!**



Például így, ha az A csúcsból indulunk:



3. **Határozzuk meg a Dijkstra algoritmussal a legrövidebb utakat s és a többi csúcs között, nyomon követve az algoritmust!**

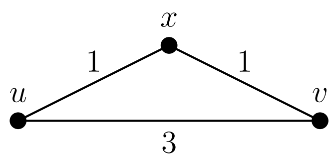


s	A	B	C	D	t	F	G	KÉSZ
$\underline{0}$	10	∞	∞	∞	∞	**3**	∞	s
$\underline{0}$	10	∞	7	**5**	∞	$\underline{3}$	5	s, F
$\underline{0}$	10	14	6	$\underline{5}$	15	$\underline{3}$	**5**	s, D, F
$\underline{0}$	10	14	**6**	$\underline{5}$	15	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, D, F, G
$\underline{0}$	**9**	14	$\underline{6}$	$\underline{5}$	15	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, C, D, F, G
$\underline{0}$	$\underline{9}$	**13**	$\underline{6}$	$\underline{5}$	15	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, A, C, D, F, G
$\underline{0}$	$\underline{9}$	$\underline{13}$	$\underline{6}$	$\underline{5}$	**15**	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, A, B, C, D, F, G
$\underline{0}$	$\underline{9}$	$\underline{13}$	$\underline{6}$	$\underline{5}$	$\underline{15}$	$\underline{3}$	$\underline{5}$	s, A, B, C, D, t, F, G

Feltéve, hogy nem számoltam el semmit.

4. **Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy G minden egyes minimális költségű F feszítőfája outputja lehet a Kruskal algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.**
Olyan élsorrenddel futtassuk a Kruskal algoritmust, amelyben az azonos költségű élek közül először az F-beliek, aztán az F-en kívüliek következnek. A Kruskal algoritmus pontosan F-et találja meg.

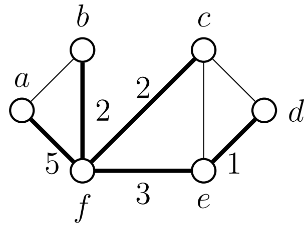
5. **[pótpótZH 2010. ősz] Adott egy G gráf, az e él hosszát jelölje $l(e)$. Minden él hosszát növeljük meg 2-vel, azaz legyen $l'(e) = l(e) + 2$ minden élre. Tegyük fel, hogy u és v között P egy legrövidebb út az l' élhosszokkal. Igaz-e, hogy P biztosan egy legrövidebb út u és v között az l' élhosszokra nézve is?**
A válasz az, hogy általában nem igaz, hogy minden élhosszt egyformán növelve bármely legrövidebb uv út legrövidebb marad az új hosszokkal is. (1 pont)
Ennek igazolására elegendő egy ellenpéldát mutatni, azaz egy olyan élhosszokkal ellátott gráfot és abban egy legrövidebb uv utat, ami nem lesz legrövidebb az élhossznövelések után. (3 pont)
Az ábrán látható gráf ilyen: eredetileg az uxv út hossza 2, a közvetlen uv él hossza pedig 3, tehát uxv az egyedüli legrövidebb uv út. Az élhosszok növelése után az uxv hossza 6 lesz, míg az uv élé 5, tehát uxv nem marad legrövidebb út. (6 pont)



6. **Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor G minimális költségű feszítőfája egyértelmű.**
Tfh van két min ktg ffa. Vegyük a legolcsóbb élt, ami az egyik fában benne van, a másikban nincs. Mondjuk F_1 tartalmazza e_1-et, de F_2 nem. $F_2 + e_1$-ben lesz egy C kör és C-nek olyan e_2 éle, ami nincs F_1-ben. Az e_1 választása miatt e_1 olcsóbb e_2-nél. De ekkor $F_2 - e_2 + e_1$ egy F_2-nél olcsóbb ffa, ellentmondás.

---

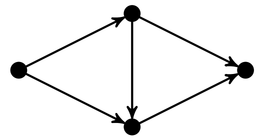
7. **[ZH, 2011. október 13.] Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G-nek.**



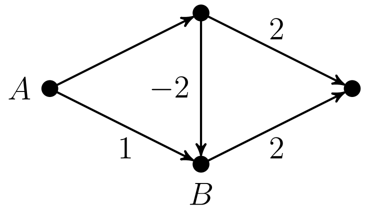
Ahhoz, hogy F minimális súlyú feszítőfa legyen az szükséges, hogy a fába be nem választott élek bármelyikét ha becseréljük a két végpontja között futó fabeli út valamelyik élére, attól a keletkező

fa súlya ne csökkenhessen, (3 pont)
azaz bármely fán kívüli él súlya legalább annyi legyen, mint a végpontjai között futó F-beli úton lévő élek súlyainak maximuma. (3 pont)
Ez konkrétan azt jelenti, hogy az ab él súlya legalább 5, a cd élé legalább 3, végül a ce él is legalább 3 súlyú. (3 pont)
Ha pedig ezeket a súlyokat adjuk a fenti éleknek, akkor az órán tanult Kruskal algoritmus meg tudja találni az F fát. (1 pont)
Az tehát a válasz, hogy a maradék élek összsúlya legalább $5 + 3 + 3 = 11$. (1 pont)

8. **[ZH 2008. október 10.] Határozzuk meg ebben a gráfban az élsúlyokat úgy, hogy a Dijkstra algoritmus rossz eredményt adjon!**



Attól, hogy rakunk bele negatív élsúlyt, még akár működhetne! Úgy kell negatív élsúlyt belerakni, hogy romoljon el. Az ábrán látható súlyozással az A csúcsból kiindulva a B csúcsra az algoritmus 1-et mond, pedig a legrövidebb út oda 0 lenne.

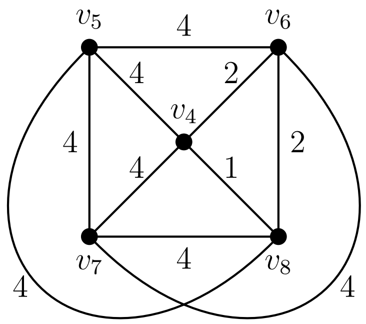


9. **Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?**
A Kruskal algoritmus először az 1 súlyú élek közül fog választani, belőlük tud építeni egy $k-1$ elű fát. Utána a 2 súlyúak következnek, belőlük $l-1$-et lehet választani. A végén az x_i és y_j pontokon lesz két feszítőfa, ezeket muszáj egy 3 súlyú éllel összekötni. Tehát $(k-1)\cdot 1+(l-1)\cdot 2+3 = k+2l$.

10. **[ZH 2010. október 15.] Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \le i \le 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \le j \le 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű gráf v_1-ből indított szélességi bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?**
Tanultuk, hogy az F fában minden v_1-ből vezető út a G gráfnak egy legrövidebb útja az adott csúcsba. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a $v_1, v_2, \ldots, v_5$ pontokból nem indulhat további éle G-nek, hiszen ekkor valamelyik csúcsba vezetne v_1-ből rövidebb út, mint a fabeli. (3 pont)
A G gráfnak tehát csak a $v_6, v_7, \ldots, v_{10}$ csúcsok között vezethet további éle. (1 pont)
Ezen csúcsok közé bárhogy is húzunk be további éleket, az F fa az így kapott G gráf szélességi bejáráshoz tartozó fája marad. (2 pont)
Mivel 5 csúcs közé $\binom{5}{2} = 10$ él húzható, a G gráfnak legfeljebb $10 + 9 = 19$ éle lehet, ahol a 9 az F élszáma. (2 pont)

11. **[pótZH 2011. december 1.] Legyen G teljes gráf a $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ponthalmazon és a $v_i v_j$ él hossza legyen $l(v_i v_j) = \frac{4}{(i,j)}$. Határozzuk meg a v_4 csúcs távolságát G többi csúcsától. Megváltoztatható-e a $v_7 v_8$ él hossza úgy, hogy v_4 és v_7 távolsága 3 legyen?**

(Megjegyés – DM: (i,j) i és j legnagyobb közös osztóját jelenti.)



Az ábrán látható a G gráf diagramja, az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. (3 pont)
A v_4-től mért távolságokat a v_4-től indított Dijsktra algoritmus segítségével határozhatjuk meg. Ennek során v_8, v_6, v_5, v_7 sorrendben érjük el a csúcsokat, mindegyik távolságot a v_4-ből vezető közvetlen él határozza meg, tehát a legrövidebb utak fája a v_4 közepű csillag lesz. (3 pont)
Ennek alapján a v_5, v_6, v_7 ill. v_8 csúcsok v_4-től mért távolságai rendre 4,2,4,1 lesznek. (2 pont)
Mivel $dist(v_4, v_7) = 4 > 3$, és $dist(v_4, v_8) = 1$, ezért ha a v_4v_8 él hosszát 2-re változtatjuk 4-ről, akkor v_4 és v_7 távolsága 3 lesz.

12. **[pótZH 2013. december 6.] Az n pontú egyszerű, összefüggő, pozitív élsúlyokkal rendelkező irányítatlan G gráfban az x és y pontok közötti legrövidebb út hossza s. Az $E' \subset E(G)$ élhalmaz éleit elhagyva a gráf két komponensre esik, x az egyik, y a másik komponensbe kerül. E' minden élén növeljük a súlyt 2-vel. Igaz-e, hogy ekkor az x és y pontok közötti legrövidebb út hossza biztosan $s + 2$ lesz?**
Nem igaz. Ellenpélda: legyenk G csúcsai x, z, u és y, élei xz és zy, xu, uz. Az xz és zy élek súlya legyen 1, az xu és uz élek súlya pedig legyen 100. Legyen $E' = \{xz, zy\}$. (Ha valakit nem zavarnak a párhuzamos élek, akkor az xu és uz élek helyett be lehet tenni egy 100 súlyú xz élt is, és az u pont nem is kell.) (6 pont)
Ekkor természetesen a legrövidebb x és y közötti út az xzy, súlya 2. Ha E' éleit elhagyjuk, G két komponensre esik szét, az egyikben van x, u és z, a másikban y. Viszont ha most az xz és zy élek súlyát 3-ra növeljük, akkor a legrövidebb x és y közötti út továbbra is az xzy, de súlya 6. (4 pont)

Megjegyés: nyilván minden x és y közötti útnak van E'-höz tartozó éle, ezért minden x és y közötti út súlya (hossza) *legalább* 2-vel nő. Vagyis a legrövidebb út hossza legalább $s + 2$.

13. **A kormány tendert ír ki n településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az n település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével igen olcsón meg tudná építeni a Rátótot és Piripócsot összekötő vezetéket, ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?**
A feladat szövege alapján a nyertesek kiválasztása úgy történik, hogy a települések és a vízmű lesznek egy gráf csúcsai, az élek pedig az egyes ajánlatok, az árral súlyozva. Ebben a gráfban lesz egy minktg feszfa kiválasztva.

Határozzuk meg tehát ezt a feszfát, és a mi két csúcspontunk közötti úton határozzuk meg a legnagyobb súlyú élet. Ennél az árnál adjunk 1 Ft-tal kisebb ajánlatot. A választás garantálja, hogy a mi élünkkel bővített gráfban a minktg feszfa tartalmazni fogja a mi élünket. Ennél nagyobbat viszont nem adhatunk, hiszen akkor lenne olyan minktg feszfa is, ami nem tartalmazza a mi élünket.

14. **Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű F feszítőfát. Határozzuk meg a G gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek F-fel a lehető legtöbb közös éle van.**
Az $F + e$-nek egyetlen köre van, mondjuk C. Legyen C legdrágább éle f. Ha f nem drágább él e-nél, akkor a Kruskal algoritmus F-et találja meg alkalmas élsorrend esetén, ezért F a válasz. Ha pedig f drágább, mint e, akkor $F - f + e$ a válasz, mert alkalmas élsorrendre a Kruskal ezt adja.

15. **Adjunk hatékony algoritmust, aminek a bemenete egy n csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.**
Elvégzünk egy szélességi bejárást, azaz keresünk egy BFS fát. Ha a szintjeinek száma legfeljebb $n/2$, akkor a gyökér jó, kész vagyunk.

Ha van $n/2$-nél távolabbi levél, akkor induljunk visszafele a legtávolabbi levéltől, pontosan $n/2$ távolságra. Az itteni csúcs pont jó lesz, hiszen az előbbi levélig teljesül a feltétel, a gráf maradék csúcsainak száma pedig legfeljebb $n/2$, vagyis nem vezethet beléjük $n/2$-nél hosszabb út.

16. **Törpfalván kitört a járvány: ronda kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van.**
Rajzoljuk fel az ismeretségi gráfot, és az egyszerűség kedvéért húzzuk össze a betegeket egy csúcsba, az ismerőseikhez vezető élek értelemszerű kezelésével. Vegyük észre, hogy a járvány pontosan úgy terjed, mintha ebből a beteg pontból indítanánk szélességi bejárást, vagyis az i napon pont az $i - 1$ távolságra lévő törpök lesznek betegek (ezt szép formálisan indukcióval is lehet bizonyítani). Ez viszont azt jelenti, hogy senki nem betegszik meg egynél többször, valamint legfeljebb a BFS fa szintszáma lehet a betegség leghosszabb ideje, ami pontosan 100. Tehát a 101-dik napon már senki sem beteg.

17. **A G irányított gráfról tudjuk, hogy pontosan egy negatív él van benne, és nem tartalmaz negatív összhosszúságú kört. Az s csúcsból szeretnénk legrövidebb utat találni az összes többibe. Hogy tudnánk ezt megtenni a Dijsktra algoritmus (esetleg többszöri) felhasználásával?**
Egy legrövidebb út kétféle lehet: vagy használja a negatív élet, vagy nem. Először futtassunk egy Dijsktrát (a szépség kedvéért hagyjuk ki a negatív élet), az i csúcsba vezető legrövidebb út hosszát jelölje d_i^+. Jelölje u azt a csúcsot, amiből a negatív él indul. Világos, hogy d_u^+ helyes, hiszen a negatív élen nem mehetünk át az ő eléréséhez az eredeti gráfban. Belőle is indíthatunk egy Dijsktrát (az eredeti gráfon), hiszen ekkor először a negatív él másik végpontját veszi be a KÉSZ halmazba, ami a definíciónak megfelel. Ezeket a legrövidebb értékeket jelölje d_i^-. A legrövidebb utak tehát $\min(d_i^+, d_u^+ + d_i^-)$ képlettel számolhatók. Így két Dijsktra segítségével kész is vagyunk.