SzA II. gyakorlat, 2015. szeptember 18.

Barátkozás a gráfokkal

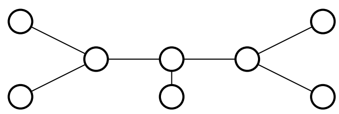
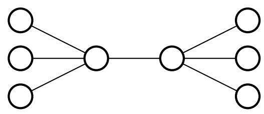
Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?**
   A $\binom{n}{2}$ lehetséges él mindegyikéről függetlenül döntünk, hogy be legyen-e húzva, így $2^{\binom{n}{2}}$.

2. **Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros, de ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.**
   Véges esetben: tfh nem igaz, vagyis a páratlan fokszámú pontok száma páratlan. Ekkor írjuk fel a fokszámok összegét:
   $$\sum_{v\in V} d(v) = 2e,$$
   ahol a jobb oldalon egy páros szám áll. A bal oldal paritásában nem számítanak a páros fokszámok, így páratlan darab páratlan fokszám összege is páratlan, tehát a bal oldal páratlan, ami lehetetlen, tehát páros darab páratlan fokszámú pontnak kell lennie.

   Végtelen gráfban: ellenpélda egy egy irányban végtelen út – az első csúcs foka 1, az összes többié 2.

3. **Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?**
   Az egyik fokszám nyilván 1, és $x \geq 2$ van belőle. A másik legyen d, és $8-x$ van belőle. Felírva a fokszámok és élszámok közötti összefüggést, tudván, hogy 7 élünk van:
   $$x \cdot 1 + (8-x)d = 2 \cdot 7,$$
   ahonnan $d = 1 + \frac{6}{8-x}$. Így az egészség követelménye és a feltételek alapján a következő megoldások lehetségesek:

   - $(x = 2, d = 2)$, és ilyen fa létezik is: egy 8 hosszú út.
   - $(x = 5, d = 3)$, és ilyen fa létezik is: 
   - $(x = 6, d = 4)$, és ilyen fa létezik is: 
   - $(x = 7, d = 7)$, és ilyen fa létezik is: egy 7 ágú csillag.

   Fontos, hogy az eredményeket ellenőriztük is, azaz igazoltuk, hogy tényleg létezik a megfelelő fa.

4. **Hány éle van az n pontú egyszerű öf. gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?**
   A gráfban biztosan van kör, különben nem lehetne több feszítőfa. Egy k hosszú körből tetszőleges él kihagyásával különböző feszítőfákat csinálhatunk, így esetünkben legfeljebb egy darab, három hosszú kör lehet. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha egy élet elhagyva már fát kapunk, tehát $n - 1 + 1 = n$ csúcsú a gráf.

5. **Igaz-e, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör?**
   Számozzuk meg a csúcsokat az $1 \ldots n$ számokkal, és az élek mindig a kisebb sorszám felől a nagyobb felé legyenek irányítva. Tfh van kör, ami áthalad az i csúcson: ekkor sorban a kör csúcsai: $i < j < \cdots < k < i$, ami ellentmondás, tehát a gráfban nincs irányított kör.

6. **Igaz-e, hogy tetszőleges G egyszerű gráf esetén vagy G, vagy a komplementere összefüggő?**
Igaz, mert egyszrészt ha G összefüggő, akkor kész vagyunk, ha pedig G nem összefüggő, akkor a komplementere az lesz (bizonyítás a 21. feladatban).

7. **Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!**
A C_5 pl. önkomplementer (hf: ellenőrizni). A K_6-nak összesen 15 éle van, az önkomplementernek pedig fele ennyi kellene legyen, vagyis 6 pontú ilyen gráf nem létezhet.

8. **Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!**
Tfh nem összefüggő. Ekkor nyilván legalább két komponense van. Vegyük a legkisebb (k) csúcsszámú komponensét, aminek legfeljebb $n/2$ csúcsa van (skatulya elv)! Mivel a gráf egyszerű, ezért ebben a komponensben a legnagyobb fokszám legfeljebb $k-1$ lehet, viszont $k-1 \leq n/2-1$. Ennek a komponensnek a fokszámai tehát a feltétellel együtt a következőt kell, hogy teljesítsék: $n/2 \leq d_i \leq n/2-1$, ami lehetetlen.

---

9. **[pótZH, 2008. december 5.] A K_6 gráf minden éléhez kiválasztunk 3 különböző számot az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tesszük ezt, lesz két különböző él, amikhez ugyanazt a három számot választottuk.**
A K_6 teljes gráfnak $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ éle van. (3 pont)
Az élekhez választott lehetséges számhármasok száma $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$. (3 pont)
Mivel $15 > 10$, ezért a skatulya-elv szerint lesz két olyan él, amihez ugyanaz a számhármas tartozik. (4 pont)

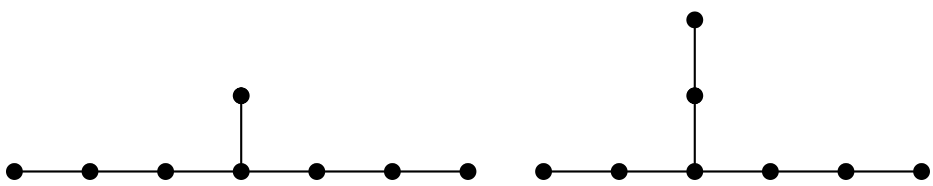
10. **Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai**

    (a) $1,2,2,3,3,3$?
    Lehet, hf rajzolni egy ilyet.

    (b) $1,1,2,2,3,4,4$?
    Nem, mert ptlan ptlan fokunk nem lehet.

11. **[pótZH, 2014. december 8.] Tudjuk, hogy a 6 pontú G gráf fokszámai $2,2,2,4,5,5$. Igazoljuk, hogy G nem egyszerű.**
Indirekt bizonyítunk, tegyük fel, hogy mégiscsak létezik egy 6 pontú, egyszerű G gráf a feladatbeli fokszámsorozattal. (2 pont)
Ekkor mindkét 5-ödfokú csúcs minden más csúccsal össze van kötve (3 pont)
tehát a három másodfokú csúcs mindegyike csak a két ötödfokú csúccsal szomszédos, (2 pont)
a negyedfokúval nem. (1 pont)
A negyedfokú csúcsnak tehát csak a két ötödfokú csúcs lehet a szomszédja, ami ellentmond G egyszerűségének. A kapott ellentmondás pedig az indirekt feltevés helytelenségét, azaz a feladat állítását igazolja. (2 pont)

12. **Mutassunk két olyan fát, amelyeknek a fokszámai megegyeznek, viszont a két fa mégsem izomorf!**



d	$\lvert\{v : d(v) = d\}\rvert$
1	3
2	4
3	1

13. **Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.**
Az egy csúcsú gráf jó. Tfh van ilyen $n \geq 2$ csúcsú egyszerű gráf. A fokszámok 0 és $n-1$ között lehetnek, vagyis pont n féle. Tehát van 0 és $n-1$ fokú csúcs is, az előbbi egy csúccsal sem, az utóbbi pedig az összessel össze van kötve, ami ellentmondás. Így csak az egy csúcsú gráf jó.

14. **Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!**
Tudjuk, hogy egy n csúcsú fának $n-1$ éle van, továbbá egy e élű gráf komplementerének $\binom{n}{2}-e$ éle van, két izomorf gráf éleinek száma pedig megegyezik. Így $n-1=\binom{n}{2}-(n-1)$, ahonnan $n=1$ vagy $n=4$, tehát csak 1 és 4 csúcsú fák jöhetnek szóba. Az egy csúcsú egyértelmű, és megnézve jó is. 4 csúcsú esetén az elsőfokú pontok száma lehet 2, így a 4 hosszú utat kapjuk, ami pont jó is. Ha az elsőfokú pontok száma 3 lenne, akkor a gráfot („csillag”) felrajzolva látjuk, hogy nem jó. Más 4 csúcsú fa pedig nem lehet.

15. **Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak?**
Egészen addig lehetséges éleket behúzni, amíg egynél több összefüggő komponensünk van, és ilyenkor mindig lehetséges is élet behúzni. Így stratégiától függetlenül pontosan $n-1$ lépés után lesz vége a játéknak (mert ekkor lesz a gráf fa), vagyis n páros esetben a kezdő játékos nyer, n páratlan esetben pedig a másodiknak lépő.

16. **Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$!**
Tfh a másodfokú pontok száma $n-3$. Ekkor mivel van legalább két elsőfokú pont, már csak egy pont fokszáma kérdéses. Tudjuk, hogy $n-1$ él van, így a fokszámok összege $1+1+(n-3)\cdot 2+d = 2e = 2\cdot(n-1)$, ahonnan $d=2$ adódna, viszont ez ellentmond a feltételnek, hiszen $n-2$ másodfokú pont lenne.

17. **Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G-nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.**
A G csúcsainak fokszámösszege $2\cdot 45 = 90$, márpedig ha minden csúcs foka legfeljebb 8 lenne, akkor a fokszámösszeg legfeljebb $8\cdot 11 = 88$ lehetne.

18. **Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?**
Vegyük észre, hogy K_{60}-nak pont 1770 éle lenne! Ebből a mi gráfunknak 2 éle hiányzik. Tehát a kérdés: K_{60}-ból hogy hagyhatunk el két élet? Egyik lehetőség, hogy egy csúcs két élét hagyjuk el, másik pedig az, ha a két élet két különböző csúcstól hagyjuk el. Más lehetőségünk nincs, különben izomorf gráfokat kapnánk. Tehát 2.

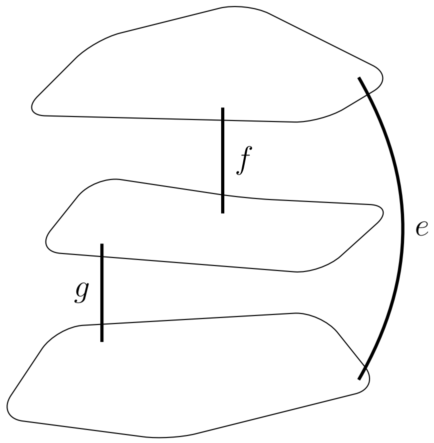
19. **Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15\cdot|E(T)|$?**
Ha n a T pontjainak száma, akkor $\frac{1}{2}n(n-1) = \binom{n}{2} = |E(\overline{T})| + |E(T)| = 15\cdot|E(T)| + |E(T)| = 16\cdot|E(T)| = 16(n-1)$, mert $|E(T)| = n-1$. Innen $n=32$, vagy $n=1$.

20. **A G egyszerű gráfnak e olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G-nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.**
A feladat szerint G-ben van pontosan egy kör, és e ennek egy éle. Mivel egyszerű gráfban minden kör legalább 3 hosszú, és G-ben a kör bármely élét elhagyva feszítőfát kapunk, a feladat állítása adódik.

21. **Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!**
Tfh nem összefüggő. Ekkor léteznek olyan x és y csúcsok melyek különböző komponensben vannak,

és a komplementerben közöttük nyilván vezet él. Vegyünk most egy tetszőleges harmadik z csúcsot: ha x és y közül egyikkel az eredeti gráfban nincs összekötve, akkor a komplementerben mindenképp egy komponensben lesz x-szel és y-nal is. Mindkettővel nem lehetett összekötve, mert akkor x és y nem lett volna különböző komponensben. Ezek alapján a komplementer összefüggő (tetszőleges két csúcs között vezet út), viszont egy összefüggő gráf nem lehet izomorf egy nem összefüggővel, így az eredeti gráfnak összefüggőnek kellett lennie.

22. **Legyenek e, f és g a G egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő marad, bármely élét is hagyjuk el, ám a $G - e - f$ és a $G - e - g$ gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a $G - f - g$ gráf sem összefüggő!**
A feladat szereint $G - e$-ben f és g is elvágó él, azaz a gráf biztosan így néz ki (ha e nem a berajzolt helyen szerepelne, akkor önmagában f vagy g elhagyásával is szétesne a gráf több komponensre):



Innen már egyértelmű, hogy f-et és g-t is elhagyva a gráf nem lesz összefüggő.

Rajz nélkül valahogy így lehetne ezt elmondani: $G - e$-ben f és g is elvágó él, de G-ben nem azok. Ezért e két vége között bármely $G - e$-beli út tartalmazza f-et és g-t is, legyen x olyan csúcs, amely egy ilyen úton f és g közé esik. Ekkor x-ből e-hez csak f-en vagy g-n keresztül lehet eljutni, ezért $G - f - g$-ben x és e közt nem vezet út, tehát $G - f - g$ nem öf.

23. **A G egyszerű gráfnak $2k$ pontja van, minden pontjának foka legalább $k - 1$, és G-nek létezik egy legalább k-adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő!**
A fokszámok miatt ekkor bármely komponense legalább k pontú. Ha tehát G szétesik, az csak úgy fordulhat elő, hogy két, egyenként k pontú komponense van. Mivel van k fokú pont, van legalább $k + 1$ pontú komponens is, ezért G nem tartalmazhat egynél több komponenst.

24. **[pótZH, 2012. november 29.] Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3 élű részgráfja van G-nek, ami út?**
A G gráf minden 3 élű sétája út, mivel G egyszeű és nincs benne háromszöget. (1 pont)
Ezért elegendő megszámolni, hogy hány 3 élű séta van G-ben: a kérdezett utak száma ennek pontosan a fele lesz, hiszen minden útból pontosan két sétát lehet alkotni. (2 pont)
A séta első csúcsa 100 féle lehet, hisz bármely csúcs szóba jön. A második csúcs a 4-regularitás miatt 4 féle lehet, (2 pont)
míg a harmadik csúcs, az iménti három maradék szomszédjának valamelyike, így ez 3-féleképp választható, hasonlóan a negyedikhez. (3 pont)
A 3 élű séták száma tehát pontosan $100 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 3600$-nak adódik, így kérdezett részgráfok száma kereken $\frac{3600}{2} = 1800$. (2 pont)

25. **Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.**

Az e_2-nek a T_2 azon útján kell lenni, ami az e_1 két végpontját összeköti. Ráadásul olyan él kell, ami a $T_1 - e_1$ két komponense között halad. Az adott út az egyik komponensből indul, a másikban ér véget, szóval biztos lesz ilyen él, és az jó is.

26. **[pótpótZH 2010. ősz] Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)| - |E(G)|$ komponense van.**

Tegyük fel, hogy a G gráfnak k komponense van, rendre $n_1, n_2, \ldots, n_k$ csúccsal. (2 pont)
Mindegyik komponens tartalmaz egy-egy feszítőfát, (2 pont)
és minden feszítőfának eggyel kevesebb éle van, mint az adott komponens mérete. (2 pont)
Ezek szerint G éleinek számára azt kapjuk, hogy $|E(G)| \geq n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_k - 1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k = |V(G)| - k$. (3 pont)
Innen a feladat állítása közvetlenül adódik. (1 pont)

Persze másképp is érvelhetünk.

Ha G-nek egy élét elhagyjuk, attól legfeljebb eggyel nő a gráf komponenseinek száma. (3 pont)
Ha G minden élét elhagyjuk, akkor a komponensek száma az eredeti k-ról $|V(G)|$-re növekszik, hiszen minden pont izolált lesz. (3 pont)
Ezek szerint $k + |E(G)| \geq |V(G)|$, (3 pont)
és ebből átrendezéssel a feladat állítását kapjuk: $k \geq |V(G)| - |E(G)|$. (1 pont)