SzA II. gyakorlat, 2015. szeptember 18.
Barátkozás a gráfokkal

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
2. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros, de ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.
3. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?
4. Hány éle van az n pontú egyszerű öf. gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?
5. Igaz-e, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör?
6. Igaz-e, hogy tetszőleges G egyszerű gráf esetén vagy G, vagy a komplementere összefüggő?
7. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
8. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!

---

9. **[pótZH, 2008. december 5.]** A K_6 gráf minden éléhez kiválasztunk 3 különböző számot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tesszük ezt, lesz két különböző él, amikhez ugyanazt a három számot választottuk.
10. Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai
    (a) $1, 2, 2, 3, 3, 3$?
    (b) $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$?
11. **[pótZH, 2014. december 8.]** Tudjuk, hogy a 6 pontú G gráf fokszámai $2, 2, 2, 4, 5, 5$. Igazoljuk, hogy G nem egyszerű.
12. Mutassunk két olyan fát, amelyeknek a fokszámai megegyeznek, viszont a két fa mégsem izomorf!
13. Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.
14. Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!
15. Ketten a következő játékot játsszák. Adott n pont, kezdetben semelyik kettő nincs összekötve. A játékosok felváltva lépnek, minden lépésben a soron következő játékos az n pont közül két tetszőlegesen választott közé behúz egy élet. Az veszít, aki kört hoz létre. A kezdő vagy a másodiknak lépő játékos nyer, ha mindketten a lehető legjobban játszanak?
16. Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n - 3$!
17. Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G-nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.
18. Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?
19. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?
20. A G egyszerű gráfnak e olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G-nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.
21. Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!

22. Legyenek e, f és g a G egyszerű, összefüggő gráf különböző élei. Tegyük fel, hogy a G gráf összefüggő marad, bármely élét is hagyjuk el, ám a $G-e-f$ és a $G-e-g$ gráfok egyike sem összefüggő. Igazoljuk, hogy ekkor a $G-f-g$ gráf sem összefüggő!

23. A G egyszerű gráfnak $2k$ pontja van, minden pontjának foka legalább $k-1$, és G-nek létezik egy legalább k-adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő!

24. **[pótZH, 2012. november 29.]** Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3 élű részgráfja van G-nek, ami út?

25. Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.

26. **[pótpótZH 2010. ősz]** Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)| - |E(G)|$ komponense van.