SzA I. gyakorlat, 2015. szeptember 11.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Ismerkedés a tárggyal és egymással

1. **Igaz-e a következő állítás: Minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak.**
   Tfh nem igaz, vagyis „Nem minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak". Ezt kicsit átrendezve: „Létezik olyan borg ebben a szobában, akinek nem piros fülei vannak". Ez nyilván nem igaz, tehát az eredeti állítás igaz.

2. **Mi az alábbi állítások tagadása? (Két állítás akkor tagadása egymásnak, ha közülük minden esetben egy és csak egy igaz)**

   (a) **Az osztályban minden tanuló lány.** Az osztályban van fiú.

   (b) **Bergengóciában minden férfi gazdag vagy nincs felesége (vagy mindkettő).** Bergengóciában van szegény és házas férfi.

   (c) **Az osztályban van olyan lány, aki magasabb, mint 170cm.** Az osztályban minden lány legfeljebb 170 cm magas.

   (d) **Bergengóciában van olyan nő, aki gazdag és nincs gyereke.** Bergengóciában minden nő szegény vagy nincs gyereke.

3. **Fogalmazzuk meg az alábbi állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó!**
   „Minden asszony életében van olyan pillanat, hogy szeretne olyat tenni, ami nem szabad."
   Van olyan asszony, aki egész életében olyat szeretne tenni, ami szabad.

4. **Van két állítás, p és q. Tudjuk, hogy ha p igaz, akkor q is igaz. Következik-e ebből, hogy ha q nem igaz, akkor p sem igaz?**
   Tfh q nem igaz, és p igaz. Ha viszont p igaz, akkor q is igaz, ami viszont nem igaz, így ellentmondásra jutottunk. Tehát p nem lehet igaz.

5. **Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mondjuk meg minden alábbi állításra, hogy biztosan igaz, lehetséges, vagy biztosan hamis!**

   (a) **Tudjuk valamiről, hogy nem hömpörő. Azt állítom, hogy ez surjancs.** Lehet, mert a nem hömöpörőkről nem tudunk semmit.

   (b) **Tudjuk valamiről, hogy hömpörő. Azt állítom, hogy ez nem surjancs.** Hamis, mert a feltételnek ellentmond.

   (c) **Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez hömpörő.** Hamis, lásd előző feladat.

   (d) **Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.** Igaz, lásd előző feladat.

   (e) **Tudjuk valamiről, hogy surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.** Lehet, mert nem mond ellent a tudottaknak, de nem is következik belőlük.

6. **Egy érettségi találkozón kiderül, hogy mindenkinek vannak gyerekei. Hogyan tudnánk megcáfolni az alábbi állításokat? Mondjuk meg, hogy milyen bizonyítékot kéne mutatni annak igazolására, hogy ezek az állítások nem igazak (lehetőleg ne használjuk a legfiatalabb, legidősebb szavakat)!**

   (a) **Mindenkinek a legidősebb gyereke 10 évnél idősebb.** Egy olyan embert, akinek az összes gyereke legfeljebb 10 éves.

   (b) **Mindenkinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél idősebb.** Egy legfeljebb 10 éves gyereket.

(c) **Valakinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél fiatalabb.** Az összes gyerek legalább 10 éves (vagy minden ember minden gyereke legalább 10 éves).

7. **Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$!**
Tfh $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, azaz $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ úgy, hogy p és q relatív prím. Ekkor átalakításokkal:
$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$
$$2q^2 = p^2$$
vagyis p^2 páros, így p is páros, vagyis $p = 2r$, és $p^2 = 4r^2$. Innen $q^2 = 2r^2$, vagyis q is páros, ami ellentmond annak, hogy p és q relatív prím.

8. **Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$**
Teljes indukcióval.

9. **Bizonyítsuk be, hogy az első n páratlan szám összege éppen n^2! Másképp: $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$.**
Teljes indukcióval.

10. **Igazoljuk, hogy öt darab, 10-nél nagyobb prím között lenni kell kettőnek, amik különbsége osztható 10-zel!**
A 10-nél nagyobb prímek biztos nem oszthatók 2-vel és 5-tel, így utolsó számjegyük csak az $\{1, 3, 7, 9\}$ halmaz valamelyik eleme lehet. Viszont mivel 5 prímünk és csak legfeljebb 4 utolsó számjegyünk van, így biztos van 2 olyan (a skatulya-elv miatt), amiknek ugyanaz az utolsó számjegye, vagyis különbségük osztható 10-zel.

11. **Két kupac gyufánk van, és egy tetszőlegesen nagy gyufautánpótlásunk. A következőképp rakosgatjuk: az egyik kupacból elveszünk valamennyit, a másikba viszont kétszer annyit teszünk. Elérhető-e valamennyi rakosgatás után, hogy ugyanannyi szál gyufa legyen mindkét kupacban, ha eredetileg az egyikben 1, a másikban 2 szál volt?**
Nem. Tfh elérhető, és a bal oldalról összesen x, a jobb oldalról összesen y gyufát vettünk el. Ekkor a gyufák száma a bal és jobb oldalon megegyezik, és így írható fel:
$$1 - x + 2y = 2 - y + 2x,$$
amiből
$$3(y - x) = 1,$$
ami nyilván lehetetlen.

---

12. **Hány részhalmaza van egy n-elemű halmaznak? Hányféle n hosszúságú 0/1 sorozat létezik? Mennyi az olyan 0/1 sorozatok száma, amelyek pontosan k db 1-est tartalmaznak?**
2^n, mert minden elemről függetlenül eldönthetjük, hogy része legyen-e a részhalmaznak. Hasonlóan minden elemről eldönthetjük függetlenül, hogy 0 vagy 1 legyen. A pontosan k egyest tartalmazó sorozatok száma $\binom{n}{k}$, hiszen n elemből k-t választunk a sorrendre tekintet nélkül, ami 1 lesz. (Ez egyébként ekvivalens a pontosan k elemű részhalmazok darabszámának kérdésével.)

13. **Ha n focicsapat körmérkőzéses bajnokságot játszik, akkor hány mérkőzésre van szükség? Kieséses rendszerben mennyi a szükséges mérkőzések száma?**
Körmérkőzés esetén $\binom{n}{2}$, mert minden lehetséges módon ki kell választani két csapatot, ami játszik egymással. Kieséses rendszerben minden meccsen 1 csapat esik ki, és a végére csak 1 csapat marad (azaz $n-1$ kell, hogy összesen kiessen), vagyis $n-1$.

14. **Hányféleképpen ültethető le egy köralakú asztal köré 6 ember? Az elforgatással egymásba vihető leültetéseket nem tekintjük különbözőknek.**
6!/6. Mondhatjuk azt, hogy ez a cirkuláris permutáció, és azért, de indokolhatjuk úgy is, hogy 1 embert rögzítünk (hozzá viszonyítunk), és az összes többit utána ültetjük le.

15. **Hányféleképpen állhat fel 10 fiú és 5 lány egy sorba úgy, hogy két lány ne álljon egymás mellett?**
$10! \cdot 5! \cdot \binom{11}{5}$, mert külön sorbaállítjuk a lányokat és a fiúkat (ez egymástól független), majd a fiúk közötti helyekre beszúrjuk az 5 lányt (11 helyből kell 5-öt választanunk).

16. **Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \dots n$ számoknak, amelyekben a páros és páratlan számok felváltva követik egymást?**
Ha n páros, akkor $2 \cdot (n/2)! \cdot (n/2)!$, mert külön elrendezzük a párosokat és a páratlanokat, majd eldöntjük, hogy párossal vagy páratlannal kezdődjön a sorozat. Ha n páratlan, akkor mindenképpen páratlan számmal kell kezdeni a sorozatot, így az $(n-1)/2$ páros és $(n+1)/2$ páratlan szám külön-külön sorbarendezése után a közös sorrend már adott: $((n-1)/2)! \cdot ((n+1)/2)!$

17. **Hányféleképpen választhatunk ki a $\{-10, -9, -8, \dots, 10\}$ számok közül 4 különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül úgy, hogy a szorzatuk pozitív legyen?**
Vagy választunk 4 negatívot, vagy 4 pozitívot, vagy 2 negatívot és két pozitívot, így $\binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{2}\binom{10}{2}$.

18. **Hány különböző módon lehet kitölteni egy ötöslottószelvényt? Hány 5-, 4-, 3- ill. 2-találatos lesz ezek között a sorsolás után?**
A lehetséges kitöltések száma $\binom{90}{5}$, mert 90 számból 5-öt kell kiválasztani a sorrendre való tekintet nélkül. Az i találatosok számát úgy kapjuk, hogy az 5 húzott számból kiválasztunk i találatot, a 85 ki nem húzott számból pedig $5-i$ tippet, ezek ftn-k, szóval $\binom{5}{i} \cdot \binom{85}{5-i}$.

19. **Hány olyan tízjegyű szám van, melyben a második számjegy 5-ös? Hány olyan tízjegyű szám van, melyben szerepel az 5-ös számjegy?**
Az első esetben $9 \cdot 1 \cdot 10^8$, mert az első helyre 0-t nem választhatunk, második hely fix, az összes többire pedig az összes számjegyet választhatjuk; a második esetben az összes lehetségesből eldobjuk azokat, amelyekben *nem* szerepel az 5-ös számjegy (az első helyen természetesn nem állhat 0): $9 \cdot 10^9 - 8 \cdot 9^9$.

20. **[ppZH, 2010.] A Cayley egyetem kombinatorika-kertészet szakának első 3 félévében összesen 18 tárgyat kell elvégezni, minden félévben hatot. Az előtanulmányi rend szerint a *Fák* tárgyat a *Feszítőfák* tárgynál előbb kell felvenni, más megkötés nincs. Hányféleképp lehet felvenni a tárgyakat az egyes félévekben, feltéve, hogy minden felvett tárgyat már az adott félévben sikeresen teljesítenek a hallgatók?**
Ha tudjuk, hogy a „Fák” ill. a „Feszítőfák” tárgyat melyik két félévben veszi fel egy hallgató, akkor a nyilván az korábbi félévben kell felvennie az előbbi, a későbbiben pedig az utóbbi tárgyat. (1 pont)
E két félévet $\binom{3}{2} = 3$-féleképp választhatjuk. (2 pont)
Ha már tudjuk, hogy melyik két félévről van szó, akkor a maradék 16 tárgyat kell a 3 félévre beosztani, úgy hogy arra a félévre, amikorra a fenti tárgyak egyikét sem vette fel, 6 tárgy jusson, a „Fák”-at hallgatott félévre 5, a „Feszítőfák”-at tartalmazóra pedig szintén további 5 tárgy kerüljön. (3 pont)
A 6 tárgy felvételére $\binom{16}{6}$ lehetőség van, a maradék tárgyakból az 5-öt $\binom{10}{5}$-féleképp lehet kiválasztani, a megmaradó 5 tárgy pedig a feszítőfákkal együtt szerepel. (3 pont)
A választásaink függetlenek, ezért a válasz $3 \cdot \binom{16}{6}\binom{10}{5} = 3 \cdot \frac{16!}{10! \cdot 6!} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 3 \cdot \frac{16!}{6! \cdot 5!^2}$. (1 pont)

21. **Bizonyítsuk be, hogy $\forall n \geq 1$-re $\sum_{i=1}^n i\binom{n}{i} = n \cdot 2^{n-1}$**
$\sum_{i=1}^n i\binom{n}{i} = \sum_{i=1}^n i\frac{n!}{i!(n-i)!} = \sum_{i=1}^n \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} = \sum_{i=1}^n n\frac{(n-1)!}{(i-1)!((n-1)-(i-1))!} = n\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} = n \cdot 2^{n-1}$

22. **[ZH, 2010. október 15.] A 15 fős képviselőtestület választásra 5 párt állít egy-egy 15 fős listát. A szavazást követően mindegyik párt a listája elejéről az elért eredményének megfelelő számú képviselőt küld a testületbe, úgy, hogy a testület összesen 15 fős legyen. Hányféle lehet a képviselőtestület a szavazás után?**
A képviselőtestület összetétele annyiféle lehet, ahányféleképp a 15 képviselői helyet el lehet osztani

5 párt között. (2 pont)
Mind a 15 helyre 5 féle pártból lehet választani, a helyek sorrendje pedig nem számít, (2 pont)
ezért 5 elem 15-öd osztályú ismétléses kombinációjáról van szó. (3 pont)
Az órán tanultak szerint ilyenből $\binom{19}{5}$ van, és ez a válasz a feladat kérdésére is. (3 pont)

23. **[ZH, 2012. október 11.] A ruletten egy pörgetés eredménye egy 0 és 36 közötti egész szám (a határokat megengedve). Hányféle olyan 10 pörgetésből álló sorozat lehetséges, ami tartalmaz két azonos eredményű pörgetést?**
A leszámlálandó pörgetések száma úgy kapható, hogy hogy a lehetséges pörgetéssorozatok számából kivonjuk azon pörgetéssorozatok számát, amelyekben mind a tíz szám különböző. (3 pont)
A lehetséges pörgetéssorozatok száma 37 elem 10-ed osztályú ismétléses permutációinak száma, azaz 37^{10}. (3 pont)
A csupa különböző eredményt adó pörgetéssorozatok éppen 37 elem 10-ed osztályú ismétlés nélküli variációi, ezek száma $\frac{37!}{27!}$. (3 pont)
A válasz tehát $37^{10} - \frac{37!}{27!}$. (1 pont)

Aki szerint egy pörgetés kimenete csupán 36 féle lehet, de egyébként jól számol, kapjon 9 pontot.

24. **[pZH, 2012. november 29.] A villamosmérnök szak mind az 556 hallgatója két-két ZH-t írt: egyet számítástudományból, egyet pedig analízisből. Számítástudományból senki sem ért el 36 pontnál többet. Bizonyítsuk be, hogy van négy olyan hallgató, akik amellett, hogy ugyanannyi pontot kaptak a számítástudomány ZH-jukra, analízisből is egyforma osztályzatot szereztek.**
A feltétel szerint egy hallgató 37 féle pontszámot szerezhetett SzA-ból, és ötféle osztályzatot analízisből, (2 pont)
így legfeljebb $37 \cdot 5 = 185$ féle lehet e két eredmény. (2 pont)
Ha egyetlen olyan eredménypár sem lenne, amit háromnál több hallgató ért el, akkor a hallgatók száma legfeljebb $3 \cdot 185 = 555$ volna, de tudjuk, hogy 556 a hallgatók száma. (5 pont)
Ezért van 4 olyan hallgató, akik azonos SzA pontszámot és Analízis érdemjegyet szereztek, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

25. **Egy 12 fős társaságot egy szálloda két háromágyas és három kétágyas szobájában kell elszállásolni. Hány különböző szobabeosztás lehetséges, ha az azonos számú ágyat tartalmazó szobákat nem különböztetjük meg egymástól?**
$\frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{2!3!}$, mert a 12 emberből kiválasztunk hármat az első háromágyas szobába, aztán a maradékból megint hármat a másodikba sít. Ekkor viszont az azonos szobák különböző sorrendjeit külön eseteknek vettük, ezért kell az osztás.

26. **Hányféleképpen helyezhető el 20 különböző zászló 10 számozott zászlórúdra úgy, hogy egy rúdon tetszőlegesen sok zászló lehet (0 és 20 között), és az egyes rudakon a zászlók sorrendje nem számít?**
Minden zászlóhoz egymástól függetlenül el kell dönteni, hogy melyik rúdra kerüljön: 10^{20}.

27. **256 bites kulccsal titkosítottam egy macskás videót, majd ezt elküldtem egy ismerősömnek emailben. Legfeljebb mennyi ideig kell próbálkoznia az NSA-nak a megnézéshez, ha feltételezzük, hogy másodpercenként 2^{30} kulcsot tudnak kipróbálni? (Feltesszük, hogy az adott titkosítást nem tudják trükkösen feltörni.)**
Mivel 2^{256} féle kulcs létezhet, így elképzelhető, hogy végig kell próbálniuk az összeset. Ez összesen $\frac{2^{256}}{2^{30}} = 2^{226}$ másodperc, azaz nagyjából $3.42 \cdot 10^{60}$ év. (Az univerzum életkora kb. $1.38 \cdot 10^{10}$ év).

---

28. **Tekintsük a következő $P(n)$ állítást: egy n fantomból álló olyan csoport, amiben van egy skót fantom kizárólag skót fantomokat tartalmaz.**
$P(1)$ triviálisan igaz.
Most tegyük fel, hogy $P(m)$ igaz valamilyen m-re. Legyen G egy $m + 1$ fantomból álló csoport, amiben van egy skót fantom. Jelölje x ezt a skót fantomot. Ha x-hez

hozzáveszünk G-ből $m-1$ másik fantomot, akkor az így kapott H csoport egy m fantomból álló csoport lesz, amiben van egy skót fantom. Mivel $P(m)$ igaz, így H-ban csak skót fantomok vannak. Legyen y az a fantom, akit kihagytunk H-ból. y és $m-1$ fantom H-ból egy olyan m tagú K fantomcsoportot alkot, amiben van legalább egy skót fantom, hiszen H-ban csak skót fantomok vannak, így az indukciós feltevést ismét használva biztosak lehetünk benne, hogy y is skót fantom, tehát G kizárólag skót fantomokból áll.
Hol a hiba? (Ez a gondolatmenet kicsit más megfogalmazásban amúgy a ló-paradoxon, lásd Wikipedia.)
A 2 méretű halmaznál nem jó az indoklás, ezen bukik az egész indukció.