SzA XIII. gyakorlat, 2015. december 4.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Trükkök százai, és végre $P?NP$

1. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $n^{11} + 10n$ osztható 11-gyel!
2. $49^{49} \equiv x \pmod{15}$
3. Mi a 403^{402} utolsó három, a $29^{39^{49}}$ utolsó két és a $7^{6^{5^{4^{3^2}}}}$ szám utolsó jegye tízes számrendszerben?
4. Gyorshatványozással számítsuk ki $7^{19} \pmod 5$ értékét!

---

5. Gondolkozzunk el az NP-beliség, $coNP$-beliség, P-beliség és NP-teljesség fogalmakon!
6. Legyen a Π döntési probléma inputja egy G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van G-ben Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in NP$.
7. **[pótZH 2010. ősz]** Legyen a Π döntési probléma inputja egy összefüggő G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van G-ben Euler-körséta. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in coNP$.
8. Legyen a Π döntési probléma inputja egy G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha G síkbarajzolható. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in NP \cap coNP$.
9. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni $\chi(G)$-t?
10. Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi $\chi(G)$. Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot $\chi(G)$ színnel?
11. Bizonyítsuk be, hogy a 4-SZÍN probléma NP-teljes!
12. Bizonyítsuk be, hogy a k-SZÍN probléma NP-teljes!
13. Bizonyítsuk be, hogy a RÉSZGRÁFIZO probléma NP-teljes! A RÉSZGRÁFIZO probléma: adott G és H gráf; kérdés: van-e G-nek H-val izomorf részgráfja?

---

14. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímszámra: $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$
15. $42^{600} \equiv x \pmod{13}$
16. $x^{11999} \equiv 5 \pmod{13}$
17. Milyen maradékot ad a 31-gyel osztva, ha $a^{100} \equiv 5 \pmod{31}$ és $a^{101} \equiv 19 \pmod{31}$?
18. Milyen maradékot ad 59^{99} 101-gyel osztva?
19. Mi az utolsó három jegye a $999^{777^{8888}}$ számnak?
20. Mi az utolsó két jegye az $1997^{2001^{2005}}$ számnak?
21. Legyenek m és n pozitív egészek, továbbá $m \mid n$. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(m) \mid \varphi(n)$.
22. Mely n számokra lesz $\varphi(n)$ prímszám? Mikor lesz $\varphi(n)$ páratlan?

---

23. Be tudjuk-e bizonyítani a következő problémák P, NP és $coNP$-beliségét? A szorgalmasak bizonyíthatnak egyes problémákra NP-teljességet is. Az input egy $G(V,E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$).
    (a) Van-e G-ben legalább k hosszú kör? (k az input része.)
    (b) Kiszínezhetők-e G pontjai 2 színnel úgy, hogy legfeljebb 2 él kivételével minden él végpontjai különböző színűek legyenek?
    (c) Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?

(d) Van-e G-ben egy legalább k pontú teljes részgráf? (k az input része.)

(e) Teljesül-e az Ore-feltétel?

(f) Van-e G-ben legfeljebb S súlyú (egyszerű) út? (S az input része.)

(g) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?

24. **[PZH 2008. december 5.]** Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy egyszerű G gráf, az n és m számok, a kimenete pedig pontosan akkor „*igen*”, ha G-nek van olyan n csúcsú részgráfja, aminek legalább m éle van.

25. **[ZH 2010. ősz]** Igazoljuk, hogy a P és NP problémaosztályba egyaránt beletartozik annak eldöntése, hogy egy inputként megadott G irányítatlan gráfban létezik-e két különböző kör.

26. **[ZH 2009. november 23.]** Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP-teljes!)
Input: G egyszerű gráf és $v \in V(G)$
Kérdés: Van-e G-nek olyan feszítőfája, amelyben v az egyetlen olyan pont, aminek a foka legalább 3?

27. Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP-teljes!)
Input: G egyszerű gráf
Kérdés: Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?

28. A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó eldöntési problémát, és bizonyítsuk be, hogy NP-teljes!

29. Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP-teljes!)
Input: G egyszerű gráf
Kérdés: G színezhető-e a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék?

30. **[ZH 2008. november 17.]** Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy $100n$ pontú irányítatlan gráf, a kimenete pedig pontosan akkor „*igen*”, ha G-nek van legalább n pontú köre.

31. Mi a következő probléma bonyolultsága? Adott G irányítatlan gráfról döntsük el, van-e olyan részgráfja, amiben minden fok $\geq k$.

Hasznos tudnivalók a túloldalon.

Hasznos tudnivalók

Euler-Fermat témakör

- $\varphi(m)$: 1 és m közötti m-hez relatív prímek száma; $\varphi(p) = p - 1$, ha p prím
- $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, ha p prím
- $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, ha $(a, b) = 1$
- $\varphi(n) = \prod(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1}) = \prod(p_i - 1)p_i^{\alpha_i-1} = n\prod(1 - \frac{1}{p_i})$
- Ha $(a, m) = 1$, akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$
- Ha p prím, akkor $a \equiv a^p \pmod p$

Bonyolultságelmélet

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P-beli, akkor **biztos**, hogy NP-beli és $coNP$-beli is!
- **P-beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem vezetünk vissza, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- **NP-beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. **Nem kell algoritmus a tanú előállítására**! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem vezetünk vissza, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.
- **NP-teljesség bizonyítása** π problémára:
  1. π NP-beliségének bizonyítása. Lásd fentebb.
  2. π NP-nehézségének bizonyítása:
     (a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismerten NP-teljes, ez legyen ρ (a feladatokban ez leggyakrabban: H-kör, H-út, k-szín, maxklikk, maxftln).
     (b) Bemutatunk egy $\rho \prec \pi$ Karp-redukciót, az irány fontos! Csak így jó!
     (c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha f az átalakítás: $x \in \rho \Leftrightarrow f(x) \in \pi$ a bizonyítandó. Figyelem! $\Leftrightarrow$! Akkor és csak akkor!
     (d) Belátjuk, hogy f polinom időben elvégezhető.
     (e) Örülünk.