SzA XI. gyakorlat, 2015. november 20.
$3 + 2 = 1$, továbbá hurrá, megint ZH!

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Határozzuk meg az Euklidészi algoritmussal $lnko(504, 372)$-t! Határozzuk meg $lkkt(504, 372)$-t! Hány osztója van 504-nek?**

$$\begin{aligned} 504 &= 1 \cdot 372 + 132 \\ 372 &= 2 \cdot 132 + 108 \\ 132 &= 1 \cdot 108 + 24 \\ 108 &= 4 \cdot 24 + \mathbf{12} \\ 24 &= 2 \cdot 12 + 0, \end{aligned}$$

tehát $lnko(504, 372) = 12$.
$lnko(x, y) \cdot lkkt(x, y) = x \cdot y$, ezért $lkkt(504, 372) = 504 \cdot 372/12 = 15624$. Másképp is lehet, a prímfelbontások alapján $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $372 = 2^2 \cdot 3 \cdot 31$, ezért $lkkt(504, 372) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31 = 15624$.
$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, ezért $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ osztója van.

2. **[PZH 2008. december 5.] Tudjuk, hogy n és m olyan pozitív egészek, amikre $lnko(n, m) = 10$ és $lkkt(n, m) = 1000$, ahol $lnko(n, m)$ és $lkkt(n, m)$ pedig rendre az n és m legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik. Határozzuk meg az nm szorzatot.**
Tétel: $lnko(n, m)lkkt(n, m) = nm$. Ebből $nm = 10 \cdot 1000 = 10000$.

3. **a és b páratlan számok, $c = a^2 + b^2$. Mennyi c és 4 legnagyobb közös osztója?**
Legyen $a = 2k + 1$ és $b = 2l + 1$, ekkor $c = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4(k^2 + l^2 + k + l) + 2$. Ekkor az Euklidészi algoritmussal

$$\begin{aligned} c &= (k^2 + l^2 + k + l) \cdot 4 + \mathbf{2} \\ 4 &= 2 \cdot 2 + 0, \end{aligned}$$

vagyis 2.

Persze az is jó (bár kevésbé elegáns) megoldás, hogy két ptlan szám összege ps lesz, így a 2-vel oszthatóság biztos, és mutatunk egy ellenpéldát, miszerint c nem osztható 4-gyel.

4. **Melyek azok a p prímszámok, amelyekre**

   (a) **$p + 10$ és $p + 14$ is prím?**
   A 3 jó. Nézzük meg a többbit! 10 3-mal osztva 1 maradékot, míg 14 pedig 2 maradékot ad. A $p \neq 3$ prímszám biztos nem osztható 3-mal, így 1 vagy 2 maradékot ad vele osztva. Első esetben $p + 14$, míg a másodikban $p + 10$ lesz osztható 3-mal, vagyis összetett. Tehát az egyetlen megoldás 3.

   (b) **$p^2 + 2$ prím?**
   A 3 ismét jó. Nézzük meg a többbit! A $p \neq 3$ prímszám biztos nem osztható 3-mal, így 1 vagy 2 maradékot ad vele osztva. p^2 3-mal vett maradéka mindkét esetben 1, viszont ehhez 2-t adva az eredmény osztható lesz 3-mal, vagyis összetett. Tehát az egyetlen megoldás ismét 3.

   (c) **$p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?**
   Pontosan ugyanúgy járunk el, mint az előző esetben, csak itt $p = 5$ lesz a jó. $p \neq 5$ esetén az $1 \dots 4$ 5-tel vett maradékok négyzete mindig 1 vagy 4 lesz, előbbi esetben $p^2 + 4$, utóbbiban $p^2 + 6$ lenne 5-tel osztható.

5. **Bizonyítsuk be, hogy $39^{14} - 1$ osztható 5-tel!**
$39^{14} - 1 \equiv (-1)^{14} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 5$.

6. **Igazoljuk, hogy tetszőleges n szám 9-es osztási maradéka megegyezik a 10-es számrendszerben felírt alakjában szereplő számjegyei összegének 9-es maradékával.**
Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $a_0, a_1, \ldots, a_n$ esetén $10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 \pmod 9$. Márpedig ez következik abból, hogy $10^k \equiv 1^k \pmod 9$, tehát $10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 10a_1 + a_0 \equiv 1^n \cdot a_n + 1^{n-1} \cdot a_{n-1} + \ldots + 1 \cdot a_1 + a_0 \pmod 9$.

7. $\mathbf{8x \equiv 3} \pmod{\mathbf{21}}$

Megoldhatóság, megoldások száma:
$(8, 21) = 1$, $1 \mid 3$, tehát van megoldás, és pontosan egy megoldás van.

Megoldás intuitívan:

$$\begin{aligned} 8x &\equiv 24 \pmod{21} \\ x &\equiv 3 \pmod{21} \end{aligned}$$

Megoldás algoritmussal:

$$\begin{array}{rl} 8x \equiv 3 \pmod{21} & 21x \equiv 0 \pmod{21} \\ 21x - 2 \cdot 8x \equiv \mathbf{5x} \equiv 0 - 2 \cdot 3 \equiv -6 \equiv \mathbf{15} \pmod{21} & 8x \equiv 3 \pmod{21} \\ 3x \equiv -12 \equiv 9 \pmod{21} & 5x \equiv 15 \pmod{21} \\ 2x \equiv 6 \pmod{21} & 3x \equiv 9 \pmod{21} \\ x \equiv 3 \pmod{21} & 2x \equiv 6 \pmod{21} \\ 0x \equiv 0 \pmod{21} & \mathbf{x} \equiv \mathbf{3} \pmod{\mathbf{21}} \end{array}$$

Magyarázat: az első lépésben a jobb oldali egyenletből ($21x \equiv 0 \pmod{21}$) kivonjuk kétszer (azaz a lehető legtöbbször) a bal oldalit ($8x \equiv 3 \pmod{21}$); az eredményt a bal oldalra írjuk, az eredetit a jobb oldalra. Ezt ismételgetjük, amíg a bal oldalon $0x \equiv 0 \pmod{21}$ jön ki.

8. $\mathbf{9x \equiv 24} \pmod{\mathbf{96}}$

Megoldhatóság, megoldások száma:
$(9, 96) = 3$, $3 \mid 24$, tehát van megoldás, és pontosan $(9, 96) = 3$ megoldás van. Osztunk tehát $(9, 96) = 3$-mal:

$$3x \equiv 8 \pmod{\mathbf{32}}$$

Innen megoldás intuitívan:

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 8 \pmod{32} \\ 3x &\equiv 72 \pmod{32} \\ x &\equiv 24 \pmod{32} \end{aligned}$$

Innen megoldás algoritmussal:

$$\begin{array}{rl} 3x \equiv 8 \pmod{32} & 32x \equiv 0 \pmod{32} \\ 2x \equiv -80 \equiv 16 \pmod{32} & 3x \equiv 8 \pmod{32} \\ x \equiv -8 \equiv 24 \pmod{32} & 2x \equiv 16 \pmod{32} \\ 0x \equiv 0 \pmod{32} & \mathbf{x} \equiv \mathbf{24} \pmod{\mathbf{32}} \end{array}$$

Vissza kell térni $\pmod{96}$-ra (32-t hozzáadogatunk):

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 24 \pmod{96} \\ x_2 &\equiv 56 \pmod{96} \\ x_3 &\equiv 88 \pmod{96} \end{aligned}$$

9. **Ha 10839-et és 11863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?**
Ha ez a háromjegyű szám x, akkor a feladat szövege szerint $10839 \equiv 11863 \pmod{x}$. Definíció szerint ez azt jelenti, hogy $x \mid 11863 - 10839 = 1024$-et. Vagyis x kizárólag 128, 256 vagy 512 lehet, így a keresett maradék 87.

---

10. $\mathbf{15x \equiv 3} \pmod{\mathbf{18}}$

Megoldhatóság, megoldások száma:
$(15, 18) = 3$, $3 \mid 3$, tehát van megoldás, és pontosan $(15, 18) = 3$ megoldás van. Osztunk tehát $(15, 18) = 3$-mal:

$$5x \equiv 1 \pmod{\mathbf{6}}$$

Innen megoldás intuitívan:

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod{6} \\ 5x &\equiv -5 \pmod{6} \\ x &\equiv -1 \equiv 5 \pmod{6} \end{aligned}$$

Innen megoldás algoritmussal:

$$\begin{array}{rlrl} 5x \equiv 1 & \pmod{6} & 6x \equiv 0 & \pmod{6} \\ x \equiv -1 \equiv 5 & \pmod{6} & 5x \equiv 1 & \pmod{6} \\ 0x \equiv 0 & \pmod{6} & \mathbf{x \equiv 5} & \pmod{\mathbf{6}} \end{array}$$

Vissza kell térni $\pmod{18}$**-ra (**6**-ot hozzáadogatunk):**

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 5 \pmod{18} \\ x_2 &\equiv 11 \pmod{18} \\ x_3 &\equiv 17 \pmod{18} \end{aligned}$$

11. $\mathbf{202x \equiv 157} \pmod{\mathbf{203}}$

Megoldhatóság, megoldások száma:
$(202, 203) = 1$, $1 \mid 157$, tehát van megoldás, és pontosan egy megoldás van.

Megoldás intuitívan:

$$\begin{aligned} 202x &\equiv 157 \pmod{203} \\ -x &\equiv 157 \pmod{203} \\ x &\equiv -157 \equiv 46 \pmod{203} \end{aligned}$$

Megoldás algoritmussal:

$$\begin{array}{rlrl} 202x \equiv 157 & \pmod{203} & 203x \equiv 0 & \pmod{203} \\ x \equiv -157 \equiv 46 & \pmod{203} & 202x \equiv 157 & \pmod{203} \\ 0x \equiv 0 & \pmod{203} & \mathbf{x \equiv 46} & \pmod{\mathbf{203}} \end{array}$$

12. $\mathbf{14x - 4 \equiv 80} \pmod{\mathbf{21}}$

Kis rendezkedés:

$$\begin{aligned} 14x - 4 &\equiv 80 \pmod{21} \\ 14x &\equiv 84 \equiv 0 \pmod{21} \end{aligned}$$

Megoldhatóság, megoldások száma:
$(14, 21) = 7$, $7 \mid 0$, tehát van megoldás, és pontosan 7 megoldás van. Osztunk tehát $(14, 21) = 7$-tel:

$$2x \equiv 0 \pmod{\mathbf{3}}$$

Itt ránézésre oszunk 2-vel:

$$x \equiv 0 \pmod{3}$$

Vissza kell térni $\pmod{21}$-re (3-at hozzáadogatunk):

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 0 \pmod{21} \\ x_2 &\equiv 3 \pmod{21} \\ x_3 &\equiv 6 \pmod{21} \\ x_4 &\equiv 9 \pmod{21} \\ x_5 &\equiv 12 \pmod{21} \\ x_6 &\equiv 15 \pmod{21} \\ x_7 &\equiv 18 \pmod{21} \end{aligned}$$

13. $\mathbf{78x - 15 \equiv 198} \pmod{\mathbf{48}}$

 Kis rendezkedés:

$$\begin{aligned} 78x - 15 &\equiv 198 \pmod{48} \\ 30x \equiv 78x &\equiv 213 \equiv 21 \pmod{48} \end{aligned}$$

 Megoldhatóság, megoldások száma:
 $(30, 48) = 6$, $6 \nmid 21$, tehát nincs megoldás.

---

14. **Létezik-e olyan háromjegyű szám, amely osztóinak száma osztható 11-gyel?**
 Mivel 11 prímszám, ennek a keresett számnak a prímfelbontása így néz ki: $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i + 1 = 11x$. Ha csak a legkisebb prímszámot, 2-t, és a legkisebb x-et, 1-et engedjük meg a prímfelbontásban, akkor is már $2^{10} = 1024$ lenne az első ilyen szám, tehát háromjegyűvel biztos nem megoldható.

15. **Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész egyértelműen felírható $n = k^2 \cdot l$ alakban, ahol k és l pozitív egészek, továbbá l egyetlen négyzetszám osztója az 1.**
 l legyen az n kanonikus alakjában a ptlan kitevőjűek szorzata, k^2 pedig a páros kitevőjűeké (ami értelemszerűen négyzetszám). A kanonikus alak egyértelműsége miatt ez a felbontás egyértelmű.

16. **Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen n-re nem egyszerűsíthető!**
 Keressük meg $lnko$-t! Euklidészi algoritmussal:

$$\begin{aligned} 21n + 4 &= 1 \cdot (14n + 3) + (7n + 1) \\ 14n + 3 &= 2 \cdot (7n + 1) + \mathbf{1} \\ 7n + 1 &= 1 \cdot (7n + 1) + 0, \end{aligned}$$

 vagyis a számláló és nevező n értékétől függetlenül relatív prím.

17. **n és m pozitív egész számok. Hány olyan pozitív egész szám van, ami legalább az egyiknek osztója?**
$d(n)+d(m)-d((n,m))$ a szita formula alapján (n osztóinak számát és m osztóinak számát összeadjuk, majd levonjuk azon osztók számát, amik mindkettőnek osztói – azaz pont a legnagyobb közös osztójuk osztóinak számát, hiszen ezeket kétszer számoltuk).

18. **Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 osztója van, akkor n nem lehet egy egész szám ötödik hatványa!**
Ha n egy egész szám ötödik hatványa, akkor a prímtényezős felírásban a kitevők így néznek ki: $5\alpha_1, \dots, 5\alpha_k$, tehát osztóinak száma $(5\alpha_1 + 1)\dots(5\alpha_k + 1)$. 2005 prímtényezős felbontása $5 \cdot 401$, viszont az osztók száma nem osztható 5-tel (minden tag $5\alpha_i + 1$ alakú).

19. **[ZH 2002.] Legyen $k \geq 2$ és jelölje $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ az $a_1, a_2, \dots, a_k$ számok legnagyobb közös osztóját, $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ pedig az $a_1, a_2, \dots, a_k$ számok legkisebb közös többszörösét. Mutassuk meg, hogy $(a_1, a_2, \dots, a_k) \cdot [a_1, a_2, \dots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$ akkor és csak akkor áll fönn minden pozitív egészekből álló szám k-asra, ha $k = 2$.**
Egyik irány: ha $k = 2$, akkor ez pont a tanult tétel.

Másik irány: tfh $k \neq 2$, és mégis teljesül. Ekkor ellenpélda: $a_i = 2^i$, ekkor lnko 2, míg lkkt 2^k, vagyis behelyettesítve $2 \cdot 2^k = 2 \cdot 2^2 \cdot \dots \cdot 2^k$. Ez viszont csak $k = 2$-re teljesülhet, pedig a feltétel szerint $k \neq 2$.

20. **Legyen $F_0 = 0, F_1 = 1$, és $n \geq 2$ esetén az n-dik Fibonacci szám $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazoljuk, hogy F_n és F_{n+1} relatív prímek.**
$(F_{n+1}, F_n) = (F_{n+1} - F_n, F_n) = (F_{n-1}, F_n) = (F_n, F_{n-1}) = \dots = (F_1, F_0) = (1, 0) = 1$, felhasználva, hogy $(a, d) = (a - d, d)$.

21. **Igazoljuk, hogy tetszőleges 10-es számrendszerben felírt $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ szám 11-es osztási maradéka megegyezik az $a_0 - a_1 + a_2 \dots \pm a_n$ szám 11-es maradékával.**
Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $a_0, a_1, \dots, a_n$ esetén $10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10a_1 + a_0 \equiv \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \cdot a_i \pmod{11}$, és éppen ezt kellett igazolnunk.

22. **Igazoljuk a 7-tel való oszthatóság ellenőrzésére szolgáló alábbi módszer helyességét. Az n szám pontosan akkor osztható 7-tel, ha 7-tel osztható az a szám, amit n tízes számrendszerbeli alakjából úgy kapunk, hogy az utolsó számjegy levágásaval kapott számból levonjuk az utolsó számjegy kétszeresét. Pl. 2002 pontosan akkor osztható 7-tel, ha $200 - 2 \cdot 2 = 196$ osztható 7-tel. Ez pedig igaz, hisz $7 \mid 19 - 2 \cdot 6 = 7$, tehát $7 \mid 2002$.**
Ha az utolsó számjegy b és a levágásával kapott szám pedig a, akkor $7 \mid 10a + b \iff 10a + b \equiv 0 \pmod{7} \iff 3a + b \equiv 0 \pmod{7} \iff 6a + 2b \equiv 0 \pmod{7} \iff -a + 2b \equiv 0 \pmod{7} \iff 7 \mid -a + 2b \iff 7 \mid a - 2b$, nekünk pedig pontosan ezt kellett igazolnunk.

23. **Dzsúlió már régóta gyűjt nagy álmára, hogy volt barátnője, Vanessza mobiltelefonon őrzőtt arcképét a bicepszére tetováltassa. Legjobb barátja, Rodzser tanácsára, míg össze nem jön az ehhez szükséges 35000 forint, átváltja az ezer forintosokban tartott megtakarítását euróra, amit a Rodzser által ajánlott Rikárdótól (az ismeretségre tekintettel) szuperkedvezményes 330 Ft-os árfolyamon vesz meg. Miután Rikárdó centekkel nem foglalkozik, Dzsúliónak éppen 140 Ft marad a megtakarításából, amiből Rodzserrel közösen lottószelvényt vesznek azzal, hogy a nyereményt majd felezik. Hány euró boldog birtokosának mondhatja magát Dzsúlió a sikeres tranzakció után?**
Ha x a válasz, akkor $1000 \mid 330x + 140$, azaz $330x \equiv -140 \pmod{1000}$ adódik. 10-zel osztás után $33x \equiv -14 \pmod{100}$, amit ha 3-mal szorozva $99x \equiv -42 \pmod{100}$, azaz $-x \equiv -42 \pmod{100}$, tehát $x \equiv 42 \pmod{100}$. Mivel Dzs megtakarítása kevesebb 35000-nél, ezért $0 \leq x \leq 350000/330 < 110$, tehát egyedül az $x = 42$ lehet helyes válasz (elvileg a lineáris kongruencia

megoldása lehetne még 142, 242, stb is). Végig ekvivalens átalakításokkal dolgoztunk, ezért nem kell ellenőrizni.