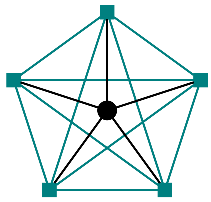
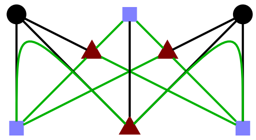
SzA X. gyakorlat, 2015. november 13.
Gráfokat rajzolunk

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?**



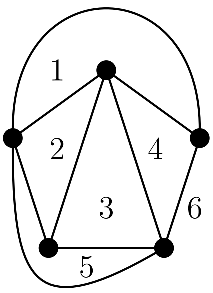


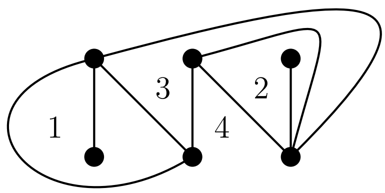
Nem, a bal oldalon egy K_5 bújik meg, a jobb oldalon pedig egy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf gráf, az ábra szerint.

2. **Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?**
Az Euler-formula ($n + t = e + 2$) és az ismert $\sum d_i = 2e$ képlet alapján $n = 8$.

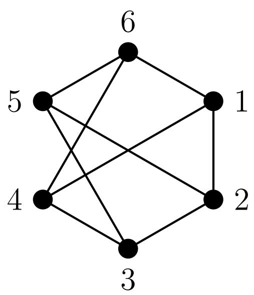
3. **Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka ≥ 6.**
Síkbarajzolható egyszerű gráfok esetén $e \leq 3n - 6$, és ebben az esetben $n\delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2e$, de tudjuk, hogy $\delta(G) = 6$, tehát $e \geq 3n$, ami ellentmondás.
Rossz gondolat, ha esetleg K_6 létét szeretnénk bizonyítani... Elég ezoterikus, de ami ennél is rosszabb: helytelen bizonyítás jönne ki belőle. Gondoljunk csak a $K_{6,6}$-ra.

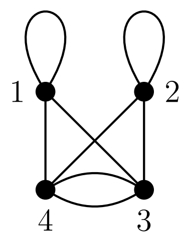
4. **Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!**





Az ábrán látható. Szorgalmasabbak eleve síkba is rajzolhatják őket.





5. **Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^*-nak?**
A duális pontjainak száma pont G tartományainak számával lesz egyenlő. Az Euler-formula, ami $n+t = e+2$, a feltételek alapján használható, továbbá a regularitás és a fokszámösszegek képlete alapján $3n = 2e$. Innen kiszámolhatjuk, hogy $e = 30$ és $t = 12 = n^*$, ami a megoldás.

6. **Rajzoltam egy n csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzoljuk le a duálisát!**
Egy pont, $n-1$ hurokéllel. Ez azért van így, mert a fában nincs kör, tehát egy tartománya van, továbbá az $n-1$ él mindegyike ezen egy tartomány között fut.

7. **Egy mezőn k ház és k kút áll. Minden háztól pontosan 4 (különböző) kúthoz vezet út (méghozzá közvetlenül, vagyis más házak vagy kutak érintése nélkül). Mutassuk meg, hogy biztosan van két olyan út, amelyek keresztezik egymást!**
A feladat ekvivalens azzal, hogy egy, mindkét osztályban k csúcsot tartalmazó 4-reguláris páros gráf nem síkbarajzolható. A gráfnak pontosan $4k$ éle van. Háromszöget nem tartalmaz (hiszen páros gráf), így ha síkbarajzolható lenne, akkor legfeljebb $4k-4$ éle lehetne, aminél a $4k$ értelemszerűen több, tehát nem síkbarajzolható.

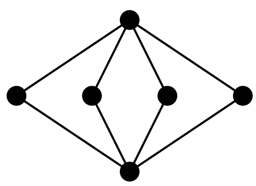
8. **[pZH 2014. december 8.] Bizonyítsuk be, hogy ha egy egyszerű G gráf síkbarajzolható, akkor a pontjainak legfeljebb a fele lehet 10-nél nagyobb fokú.**
Elegendő az állítást összefüggő gráfokra igazolni, hiszen ha G minden komponensére igaz, hogy az adott komponens csúcsainak legfeljebb a felének a fokszáma nagyobb 10-nél, akkor ugyanez az egész G gráfra is teljesül. Feltehetjük tehát, hogy G összefüggő, és legalább 12 csúcsú, hisz ellenkező esetben G-nek egyetlenegy legalább 11 fokú pontja sincs. (1 pont)
Legyenek tehát n, t és e a G szokásos paraméterei, és jelölje m a G legalább 11-edfokú csúcsainak számát. Az Euler formula miatt $n+t=e+2$. (3 pont)
A fokszámok összege a kétszeres élszám, ezért $2e \geq 11m+(n-m)$, azaz $2e \geq 10m+n$, hiszen m csúcs fokszáma legalább 11, és a maradék $(n-m)$-é pedig legalább 1. (2 pont)
Minden él 2 tartományt határol, és minden tartományt legalább 3 él határol, ezért $2e \geq 3t$ (2 pont)
A fentiek szerint tehát, $6n+4e \geq 6n+6t=6e+12$, azaz $6n \geq 2e+12 \geq 10m+n+12$, ahonnan $5n \geq 10m+12 > 10m$ adódik, más szóval $n > 2m$, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (2 pont)

Megjegyzések (DM): a mintamegoldás hallgatólagosan bizonyította, hogy síkbarajzolható ($n \geq 3$) gráfokra $e \leq 3n-6$, de mivel ez szerepelt előadáson és gyakorlaton is, így bizonyítás nélkül is felhasználható. Ha ezt direktben használjuk, akkor ezeket tudjuk: $2e \geq 10m+n$ (lásd fent), valamint $e \leq 3n-6$. Az utóbbit kettővel szorozva a két egyenlőtlenséget összehozhatjuk: $6n-12 \geq 2e \geq 10m+n$, innen pedig pont ugyanúgy tovább, ahogy a mintamegoldásban.

---

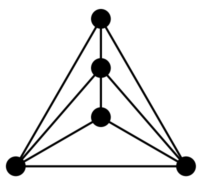
9. **Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5-e, K_{3,3}-e, \bar{C}_6$, Petersen gráf?**
K_6: nem, hiszen tartalmazza részgráfként K_5-öt.

$K_{4,2}$: igen

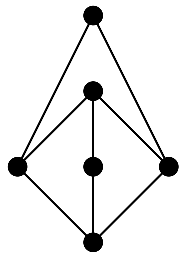


$K_{4,2}$: nem, hiszen tartalmazza részgráfként $K_{3,3}$-at.

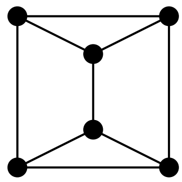
K_5-e: igen



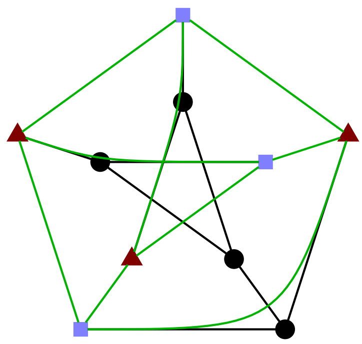
$K_{3,3} - e$: igen



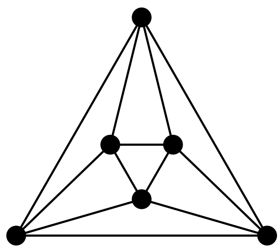
$\bar{C}_6$: igen



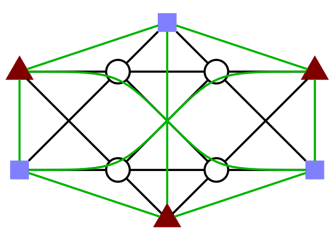
Petersen gráf: nem, $K_{3,3}$ soros bővítése részgráfként az ábrán:



10. **[ZH 2009. november 23.] A G gráfot úgy kaptuk, hogy a 6 pontú teljes gráfból elhagytunk három független (vagyis pontdiszjunkt) élt. Síkbarajzolható-e ez a G gráf?** *(Ha igen, rajzoljuk le keresztezés nélkül, csupa egyenes szakasszal, ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!)*
Magyarul: egy K_6-ból elhagytunk egy teljes párosítást. Mindenféle szimmetriaokokból ezt csak egyféleképpen tehetjük meg. A keletkezett gráfban $e = 15 - 3 = 12$. Síkbarajzolható (ezt megtippeltük), akinek segít, t-t is kiszámolhatja az Euler-formulával. Egy megoldás pl:

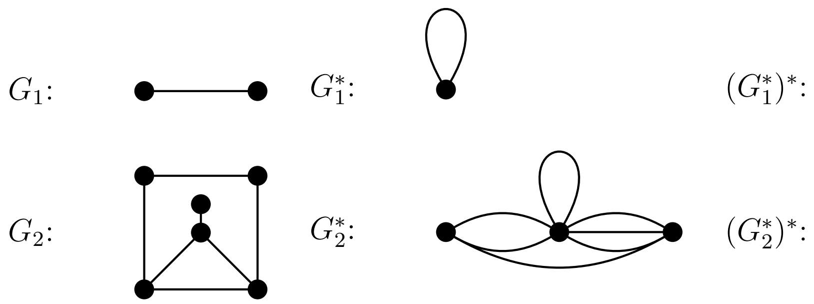


11. **[pZH 2011. december 1.] Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?**



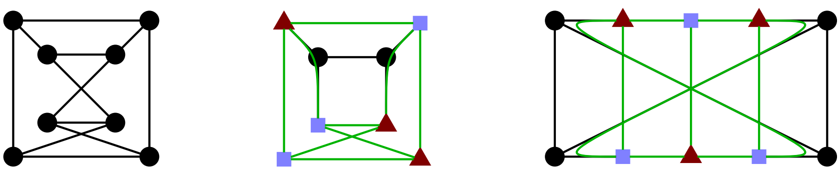
A megjelölt csúcsok és élek által alkotott élek $K_{3,3}$ egy soros bővítését mutatják. (8 pont)
Tanultuk, hogy $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, így annak soros bővítése sem az, tehát a feladatban szereplő gráf sem síkbarajzolható. (2 pont)

12. **Adjunk meg egy olyan G_1 és G_2 gráfokat, hogy adott lerajzolás szerint $G_1 \cong (G_1^*)^*$ és $G_2 \ncong (G_2^*)^*$!**
Sokfélét lehet rajzolni mindkettőből, két egyszerű példa:

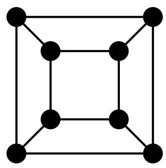


13. **[ZH 2009. november 23.] Egy 12 csúcsú konvex poliédernek 10 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?**
A konvex poliéder élhálója (a tanultak szerint) pont egy síkbarajzolható gráfnak felel meg. Ennek a gráfnak a duálisában a pontok fokszáma viszont pont a nekik megfelelő lapok oldalszámával egyezik meg. Azaz: $n = 12$, $t = n^* = 10$, $e^* = e = n + t - 2 = 20$, $\sum d^* = 2e^*$, $\sum d^* = n^* d^*$, fentieket rendezve, kiszámolva a $d^* = 4$, vagyis a keresett szám 4.

14. **Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?**

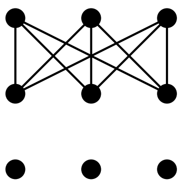


A bal oldali igen, lásd alább egy konkrét síkbarajzolását. A jobb oldaliak nem, lásd mindkettőben a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot.

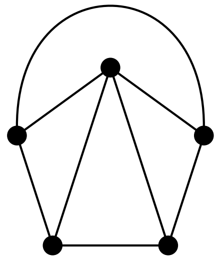


15. **Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos! (Feltételezhetjük, hogy a világ nem tórusz alakú, valamint nincsenek exklávék.)**
Feleltessünk meg egy gráfban minden országnak egy csúcsot, és akkor legyen összekötve két csúcs, ha a két ország szomszédos egymással. Ennek a gráfnak síkbarajzolhatónak kell lennie. Ha viszont mindenki szomszédos lenne mindenkivel, akkor a gráf nem lenne síkbarajzolható, mert K_5 lenne.

16. **Van-e olyan 9-pontú G gráf, hogy sem G sem a $\overline{G}$ komplementere nem síkbarajzolható?**
Igen van, pl (K_3 triviálisan látszik benne, a komplementerben is triviálisan lesz):



17. **Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!**



18. **[ZH 2008. november 17] Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G \cong G^*$ teljesül, továbbá $e = n + 2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig G csúcsainak számát jelöli.**
Az izomorfia miatt $n^* = n$, a duális definíciója miatt pedig $n^* = t$, tehát az Euler-formula, az előzőek, és a feltétel alapján $n + t = e + 2 = n + n = n + 2 + 2$, ahonnan $n = 4$ és $e = 6$. Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért nem lehetnek többszörös- és hurokélek, a K_4-nek pedig pont 6 éle van, így ha létezik ilyen gráf, akkor az csak a K_4 lehet. K_4-et síkbarajzolva és elkészítve a duálisát láthatjuk, hogy jé, tényleg izomorfak.

19. **[PZH 2008. december 5.] Tegyük fel, hogy G olyan síkbarajzolható, egyszerű gráf, amibe nem tudunk további élt húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával. Igazoljuk, hogy ha G^* a G duálisa, akkor G^* 3-reguláris.**
Ha a duálisban van másod- vagy elsőfokú pont, akkor az eredeti gráf nem egyszerű (másodfokú: párhuzamos élek, elsőfokú: hurokél). Ha van 3-nál magasabb d fokú pont, akkor viszont az ehhez tartozó pont olyan tartománynak felel meg, amit d él határol. Ebbe viszont legalább egy élet be tudunk húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával, ami ellentmond a feltételnek. Tehát csak harmadfokú pontjaink lehetnek, azaz 3-reguláris a gráf.

20. **[PPZH 2010. ősz] Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor G bármely G^* duálisának van olyan tartománya, amit legfeljebb 5 él határol.**
Tanították, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható és csúcsainak száma $n \geq 3$, akkor G-nek legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (2 pont)
Ha G-nek legfeljebb 2 csúcsa van, akkor éleinek száma legfeljebb egy, ugyanennyi éle van tehát G^*-nak is, ezért G^* bármely lapjának határa legfeljebb két élből áll. (Hiszen az egyetlen él mindkét oldala határolja ugyanazt a lapot.) (1 pont)
Ha pedig G-nek legalább 3 csúcsa van, akkor a G-beli csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese, tehát legfeljebb $6n - 12$. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy G-nek van olyan csúcsa, ami legfeljebb ötödfokú, hiszen ha minden csúcsnak legalább 6 lenne a foka, akkor a fokszámösszeg legalább $6n$ lenne. (2 pont)
Legyen v ilyen, legfeljebb 5-ödfokú csúcs G-ben. A v csúcs a G^* valamelyik tartományának belsejében van. Az ezen tartomány határoló G^*-beli élek éppen a v-ből induló G-beli éleknek felelnek meg, (3 pont)
ezért ezt a tartományt legfeljebb 5 él határolja, mi pedig éppen egy ilyen létezését akartuk igazolni. (2 pont)

Ha vki azt hivatkozza, hogy minden egyszerű sr gráfnak van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azért is jár az 5 pont. Ha a $3n - 6$-os felső becslés alapján jutunk erre, akkor vhogy el kell intézni a legfeljebb 2 csúcsú gráfokat.

21. **Igazoljuk, hogy ha G n pontú sr gráf, és G izomorf G^*-gal, akkor G-nek $2n - 2$ éle van!**
Mivel G^* öf, ezért G is az az izomorfia miatt. Tehát $n + t = e + 2$ az Euler formulából, $n* = t$ a

definícióból, végül $n^* = n$ az izomorfiából, ahonnan $2n = e + 2$ adódik. (Az $n-1$-szög alapú gúla élhálója pl ilyen.)

22. **Tfh G öf, sr, és G minden lapja háromszög, ill., hogy G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G-nek?**
Az éleket duplán számolva $3t = 2e = 2e^* = 4t^*$. Mivel G öf, ezért $t^* = n$. Szóval $n + t = e + 2$, azaz $6e + 8e = 12n + 12t = 12e + 24$, vagyis $e = 12$. Innen $n = 6$ és $t = 8$. (A kocka élhálója pl ilyen.)

23. **Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?**
A poliéder élhálója öf síkgráf, 20 csúcsa és 12 lapja van. Az élek száma $6k$, hisz $12k$ a körök összhossza, amiben minden élt kétszer számoltunk. Innen Euler-formulából $k = 5$.

24. **[ZH 2011. november 24.] Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G-nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.**
Az órán szerepelt Kuratowski tételt fogjuk felhasználni, ami szerint ha egy G gráf nem síkbarajzolható, akkor tartalmaz $K_{3,3}$-mal vagy K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot. (3 pont)
Márpedig ha egy gráf $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf, akkor annak pontosan 6 harmadfokú csúcsa van, így G-nek is legalább hat legalább harmadfokú csúcsának kell lennie, hogy ilyen részgráfja lehessen. (3 pont)
Ha pedig egy gráf K_5-tel topologikusan izomorf, akkor pontosan 5 negyedfokú csúcsa van, ezért ha G ilyen részgráfot tartalmaz, akkor $\Delta(G) \geq 4$ teljesül. (3 pont)
A feladatban szereplő G gráfra mindkét fenti eset elképzelhetetlen, ezért G a Kuratowski tétel miatt bizonyosan síkbarajzolható. (1 pont)

25. **[ppZH 2011. december 14.] Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a $\bar{G}$ komplementergráf nem síkbarajzolható.**
Tanították, hogy egy n csúcsú, egyszerű, sr gráfnak $n > 3$ esetén legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (3 pont)
Jelen esetben ez azt jelenti, hogy G-nek legfeljebb $3 \cdot 11 - 6 = 27$ éle lehet. (3 pont)
Ezért aztán $\bar{G}$ élszáma legalább $\binom{11}{2} - 27 = 55 - 27 = 28$ lesz, (3 pont)
tehát az elsőnek idézett ok miatt $\bar{G}$ nem síkbarajzolható. (1 pont)

26. **Hány csúcsa van egy olyan öf síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van?**
A lapok oldalszámait összeadva minden élt kétszer számolunk le, szóval $2e = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 = 26$, azaz $e = 13$. Másrészt $t = 7$ és $n + t = e + 2$ (öf a gráf), azaz $n + 7 = 13 + 2 = 15$, azaz $n = 8$.

27. **Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?**
Ha a ill. b a négyszögek ill. nyolcszögek száma, akkor $t = a + b$, $2e = 3n$ (3-regularitás), $2e = 4a + 8b$, valamint $n + t = e + 2$. Innen elemi algebra.