SzA kiegészítő feladatok, 2014. november. 23.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Lineáris kongruenciák

1. $\mathbf{8x \equiv 3} \pmod{\mathbf{21}}$

   Megoldhatóság, megoldások száma:
   $(8, 21) = 1$, $1 \mid 3$, tehát van megoldás, és pontosan egy megoldás van.

   Megoldás intuitívan:

$$\begin{aligned} 8x &\equiv 24 \pmod{21} \\ x &\equiv 3 \pmod{21} \end{aligned}$$

   Megoldás algoritmussal:

$$\begin{array}{rr} 8x \equiv 3 \pmod{21} & 21x \equiv 0 \pmod{21} \\ 21x - 2 \cdot 8x \equiv \mathbf{5x} \equiv 0 - 2 \cdot 3 \equiv -6 \equiv \mathbf{15} \pmod{21} & 8x \equiv 3 \pmod{21} \\ 3x \equiv -12 \equiv 9 \pmod{21} & 5x \equiv 15 \pmod{21} \\ 2x \equiv 6 \pmod{21} & 3x \equiv 9 \pmod{21} \\ x \equiv 3 \pmod{21} & 2x \equiv 6 \pmod{21} \\ 0x \equiv 0 \pmod{21} & \mathbf{x \equiv 3} \pmod{\mathbf{21}} \end{array}$$

   Magyarázat: az első lépésben a jobb oldali egyenletből ($21x \equiv 0 \pmod{21}$) kivonjuk kétszer (azaz a lehető legtöbbször) a bal oldalit ($8x \equiv 3 \pmod{21}$); az eredményt a bal oldalra írjuk, az eredetit a jobb oldalra. Ezt ismételgetjük, amíg a bal oldalon $0x \equiv 0 \pmod{21}$ jön ki.

2. $\mathbf{9x \equiv 24} \pmod{\mathbf{96}}$

   Megoldhatóság, megoldások száma:
   $(9, 96) = 3$, $3 \mid 24$, tehát van megoldás, és pontosan $(9, 96) = 3$ megoldás van. Osztunk tehát $(9, 96) = 3$-mal:

$$3x \equiv 8 \pmod{\mathbf{32}}$$

   Innen megoldás intuitívan:

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 8 \pmod{32} \\ 3x &\equiv 72 \pmod{32} \\ x &\equiv 24 \pmod{32} \end{aligned}$$

   Innen megoldás algoritmussal:

$$\begin{array}{rr} 3x \equiv 8 \pmod{32} & 32x \equiv 0 \pmod{32} \\ 2x \equiv -80 \equiv 16 \pmod{32} & 3x \equiv 8 \pmod{32} \\ x \equiv -8 \equiv 24 \pmod{32} & 2x \equiv 16 \pmod{32} \\ 0x \equiv 0 \pmod{32} & \mathbf{x \equiv 24} \pmod{\mathbf{32}} \end{array}$$

   Vissza kell térni $\pmod{96}$-ra (32-t hozzáadogatunk):

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 24 \pmod{96} \\ x_2 &\equiv 56 \pmod{96} \\ x_3 &\equiv 88 \pmod{96} \end{aligned}$$

3. $\mathbf{15x \equiv 3 \pmod{18}}$

Megoldhatóság, megoldások száma:
$(15,18) = 3$, $3 \mid 3$, tehát van megoldás, és pontosan $(15,18) = 3$ megoldás van. Osztunk tehát $(15,18) = 3$-mal:

$$5x \equiv 1 \pmod{\mathbf{6}}$$

Innen megoldás intuitívan:

$$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod 6 \\ 5x &\equiv -5 \pmod 6 \\ x &\equiv -1 \equiv 5 \pmod 6 \end{aligned}$$

Innen megoldás algoritmussal:

$$\begin{array}{rlrl} 5x \equiv 1 & \pmod 6 & 6x \equiv 0 & \pmod 6 \\ x \equiv -1 \equiv 5 & \pmod 6 & 5x \equiv 1 & \pmod 6 \\ 0x \equiv 0 & \pmod 6 & \mathbf{x \equiv 5} & \pmod{\mathbf{6}} \end{array}$$

Vissza kell térni $\pmod{18}$-ra (6-ot hozzáadogatunk):

$$\begin{aligned} x_1 &\equiv 5 \pmod{18} \\ x_2 &\equiv 11 \pmod{18} \\ x_3 &\equiv 17 \pmod{18} \end{aligned}$$

4. $\mathbf{202x \equiv 157 \pmod{203}}$

Megoldhatóság, megoldások száma:
$(202,203) = 1$, $1 \mid 157$, tehát van megoldás, és pontosan egy megoldás van.

Megoldás intuitívan:

$$\begin{aligned} 202x &\equiv 157 \pmod{203} \\ -x &\equiv 157 \pmod{203} \\ x &\equiv -157 \equiv 46 \pmod{203} \end{aligned}$$

Megoldás algoritmussal:

$$\begin{array}{rlrl} 202x \equiv 157 & \pmod{203} & 203x \equiv 0 & \pmod{203} \\ x \equiv -157 \equiv 46 & \pmod{203} & 202x \equiv 157 & \pmod{203} \\ 0x \equiv 0 & \pmod{203} & \mathbf{x \equiv 46} & \pmod{\mathbf{203}} \end{array}$$

5. $\mathbf{14x - 4 \equiv 80 \pmod{21}}$

Kis rendezkedés:

$$\begin{aligned} 14x - 4 &\equiv 80 \pmod{21} \\ 14x &\equiv 84 \equiv 0 \pmod{21} \end{aligned}$$

Megoldhatóság, megoldások száma:
$(14, 21) = 7$, $7 \mid 0$, tehát van megoldás, és pontosan 7 megoldás van. Osztunk tehát $(14, 21) = 7$-tel:

$$2x \equiv 0 \pmod{\mathbf{3}}$$

Itt ránézésre oszunk 2-vel:

$$x \equiv 0 \pmod 3$$

Vissza kell térni $\pmod{21}$**-re (3-at hozzáadogatunk):**

$$\begin{aligned}
x_1 &\equiv 0 \pmod{21} \\
x_2 &\equiv 3 \pmod{21} \\
x_3 &\equiv 6 \pmod{21} \\
x_4 &\equiv 9 \pmod{21} \\
x_5 &\equiv 12 \pmod{21} \\
x_6 &\equiv 15 \pmod{21} \\
x_7 &\equiv 18 \pmod{21}
\end{aligned}$$

6. $\mathbf{78x - 15 \equiv 198} \pmod{\mathbf{48}}$

   Kis rendezkedés:

$$\begin{aligned}
78x - 15 &\equiv 198 \pmod{48} \\
30x \equiv 78x &\equiv 213 \equiv 21 \pmod{48}
\end{aligned}$$

   Megoldhatóság, megoldások száma:
   $(30, 48) = 6$, $6 \nmid 21$, tehát nincs megoldás.