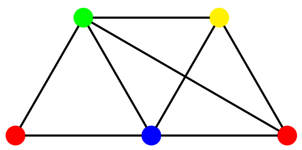
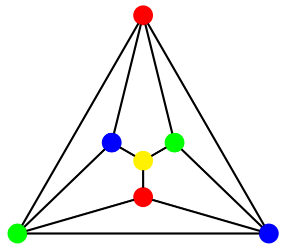
SzA VIII. gyakorlat, 2014. október. 31.

Gráfokat színezünk, továbbá folyton folyvást folyamok

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:**
   C_4, C_5, alábbi 2 gráf

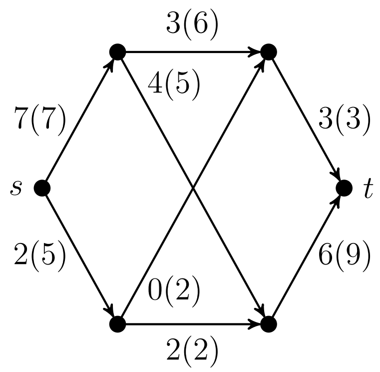




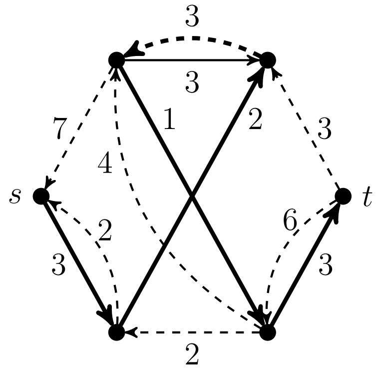
   $\chi(C_4) = 2$, páros hosszú kör kromatikus száma mindig 2. $\chi(C_5) = 3$, mert páratlan kör. A bal oldali gráfban $\omega(G) = 4$, tehát $\chi(G) \geq 4$, viszont egy 4 színnel színezést tudunk is mutatni. A jobb oldali gráfban $\chi(G) = 4$, mert bár az alsó korlát 3, a külső csúcsoknak különböző színűeknek kell lenniük, és ha ezeket kiszínezzük, és tovább folytatjuk az egyértelműen kiszínezhető csúcsok színezését, akkor a középső csúcsnak muszáj bevezetni egy negyedik színt (vagyis egy olyan feltételezés esetén, hogy 3 színnel színezhető lenne, ellentmondásra jutunk).

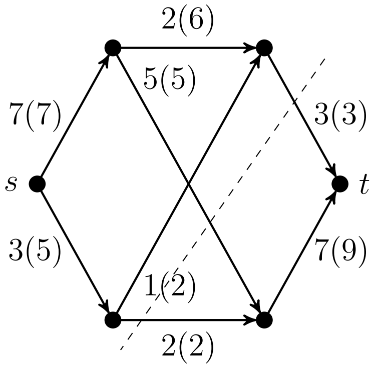
2. **Van-e olyan G gráf, amiben nincs 4 csúcsú teljes részgráf, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?**
   Mi az hogy, nagyon is! Például a fenti jobb oldali.

3. **Növeljük a bal oldali gráfban a megadott folyamot, ha ez lehetséges, vagy mutassuk meg, hogy ez már egy maximális folyam!**

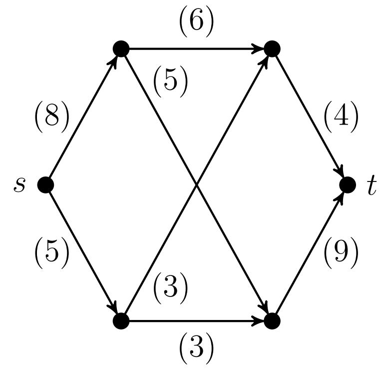


   Bal oldalt szerepel a javítógráf, szaggatottal jelölve a visszafele tartó élek, valamint vastagítva egy javítóút, ahol a minimális érték 1. A javítást elvégezve 1 értékkel a jobb oldalon szerepel az eredményül előálló folyam.

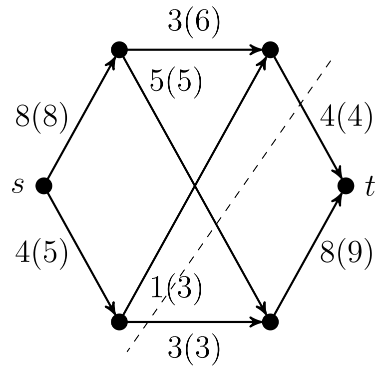




Egyébként a szagattottal jelölt vágás értéke 10, valamint a folyamunk is 10 értékű, tehát a vágás minimális, a folyam pedig maximális, így hiába is próbálnánk tovább javítani.



4. **Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a fenti jobb oldali gráfban!**
Alább látható egy 12 értékű folyam és egy szintén 12 értékű vágás. Így láthatjuk, hogy van egy maximális folyamunk és egy minimális vágásunk. Az eredményt megkaphattuk a javítóutas algoritmussal, de akár ránézésre is.

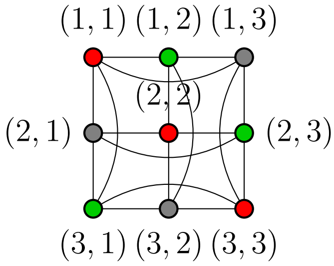


---

5. **G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G-ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?**
Az egy sorhoz (vagy oszlophoz) tartozó csúcsok K_8-at alkotnak, tehát biztos, hogy $\chi(G) \geq 8$. 8 szín viszont elég is, az alábbi egy jó színezés:

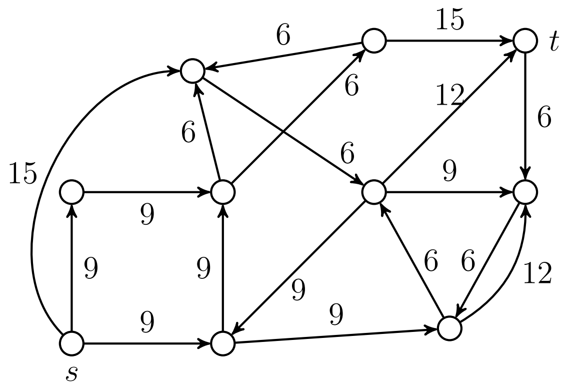
1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
				⋮			
2	3	4	5	6	7	8	1

6. **[ppZH 2012. december 12.] Legyenek a G_n egyszerű gráf csúcsai az (i, j) számpárok, ahol i és j 1 és n közötti egészek. A G_n gráf (i, j) és (k, l) egymástól különböző csúcsai pontosan akkor szomszédosak, ha $i = k$ vagy $j = l$. Rajzoljuk le G_3 egy áttekinthető diagramját, valamint határozzuk meg G_3 kromatikus számát, $\chi(G_3)$-t.**



A mellékelt ábra G_3 egy áttekinthetőnek szánt diagramját muatatja. (4 pont)
Mivel az $(1,1)$, $(1,2)$ és $(1,3)$ csúcsok páronként szomszédosak, ezért $\chi(G_3) \geq \omega(G_3) \geq 3$. (3 pont)
Az ábrán látható G_3 egy 3-színezése, tehát $\chi(G) = 3$. (3 pont)

7. **[ZH 2008. október 10.] Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)**

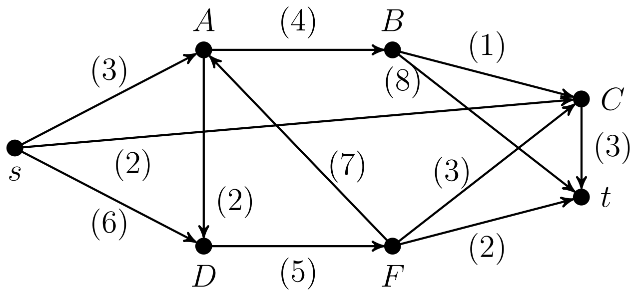


A maximális folyamnagyság megegyezik a minimális st-vágás értékével. (3 pont)
Mivel minden él kapacitása 3-mal osztható, (2 pont)
ezért a minimális vágáskapacitás is 3 többszöröse (2 pont)
tehát a maximális folyamnagyság is 3-mal osztható. (2 pont)
A 17-et 3-mal osztva 2 maradékot kapunk, ezért a maximális folyamnagyság nem lehet 17. (1 pont)

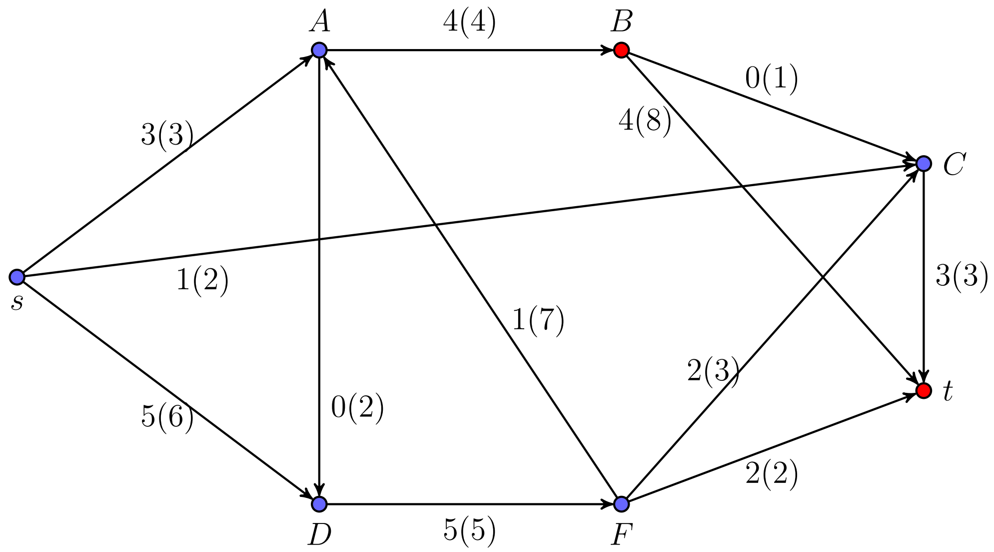
Meg lehet oldani persze a feladatot a maximális folyam meghatározásával is.

A javító utak módszerével meghatározunk egy maximális folyamot, ami itt 18 értékű lesz. (8 pont)
Tehát a maximális folyamnagyság 18, vagyis semmiképp sem 17. (2 pont)
(Nem rajzolom le.)

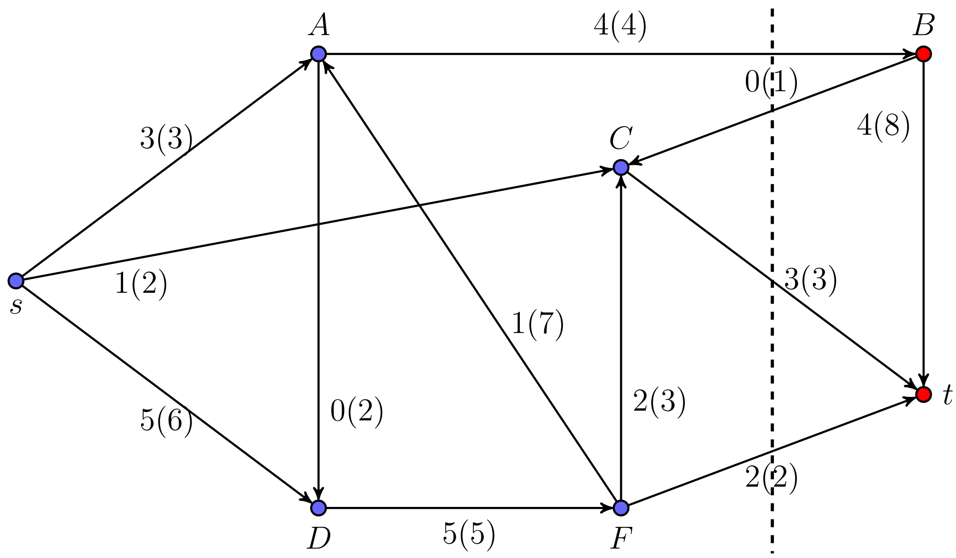
8. **Határozzunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a következő hálózatban!**



A lépéseket nem írom le, a végeredmény:

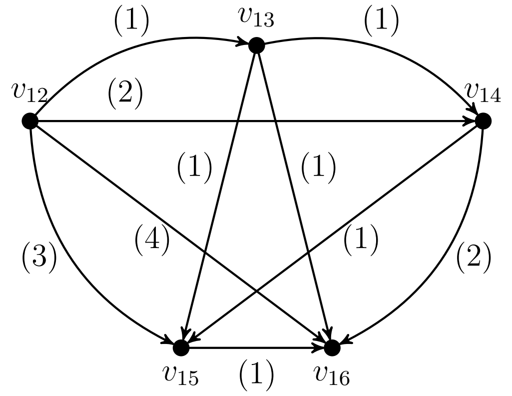


A vágást nehéz lenne szépen berajzolni, kékesen és pirosasan szerepelnek a két osztályba tartozó csúcsok. Átrajzolva, és a vágást jelölve:

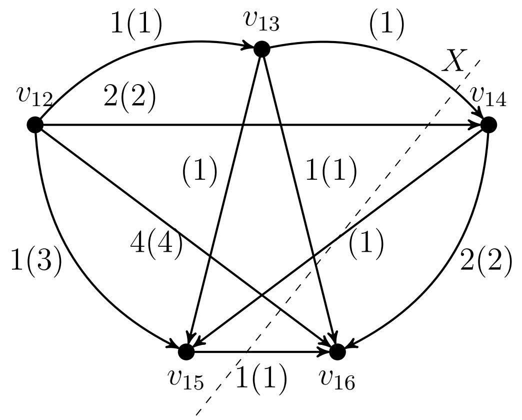


9. **Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G-nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!**
   Tfh nincs ilyen piros pont. Ekkor egy tetszőleges piros pontot mindig át tudunk színezni olyan színűre, ami hiányzik a szomszédai közül. Ha ezt az összes piros pontra megcsináljuk, akkor szintén egy jó színezést kapunk, viszont így $\chi(G) = k - 1$ lenne, ami ellentmondás.

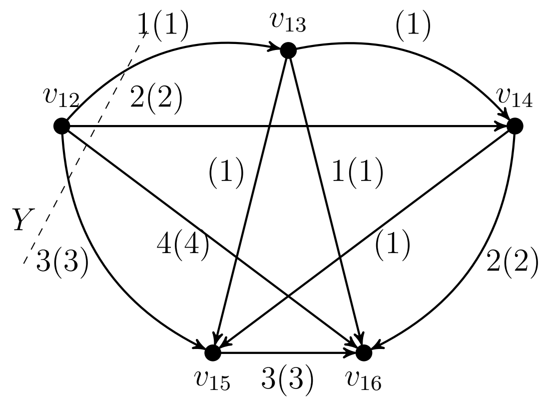
10. **[pZH 2011. december 1.] A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a v_iv_j él kapacitása $c(v_iv_j) = (i, j)$, más éle G-nek nincs. Ha a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12}-ből v_{16}-ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15}v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyamnagyság elérhető?**
    Megjegyzés: (i, j)-vel jelöljük i és j számok legnagyobb közös osztóját.
    Az ábrán látható az adott hálózat diagramja. (2 pont)



Ezen a tanult javító utas algoritmussal kerestünk maximális nagyságú folyamot, mégpedig a (v_{12}, v_{16}), (v_{12}, v_{14}, v_{16}), (v_{12}, v_{13}, v_{16}) és (v_{12}, v_{15}, v_{16}) utakon rendre 4-et, 2-t, ill. 1-et, 1-et javítva, az eredményül előálló értékek az ábrán láthatók. A kapott 8 nagyságú folyam maximalitását az ábrán szaggatottal jelölt 8 kapacitású X vágás bizonyítja. (4 pont)



Ha most a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását kellően nagynak választjuk, akkor még tovább növelhető a folyam nagysága (v_{12}, v_{15}, v_{16}) úton. Így kapjuk a következő ábrán szereplő, 10 nagyságú folyamot, aminél nagyobbat nem kaphatunk, hiszen az ott jelölt Y vágás kapacitása 10, és ez a vágás nem tartalmazza a $v_{15}v_{16}$ élet. (2 pont)



Ahhoz, hogy az X vágás kapacitása legalább 10 legyen, a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását legalább 3-ra kell növelni, tehát ekkora növelés feltétlenül szükséges a 10 nagyságú folyamhoz. Láttuk, hogy ez elég is, tehát 3 a legkisebb olyan kapacitás, amire ez elérhető. (2 pont)

11. **Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.**
$\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$: a két kromatikus szám közül a nagyobbal nyilván az egyik és másik komponenst is ki tudjuk színezni. Kevesebb nyilván nem elég, hiszen az egyik komponenst már önmagában sem lehet ennél kevesebbel kiszínezni, tehát az egészet sem.

   $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$: ennyivel ki lehet színezni, a H-t kiszínezzük $\chi(H)$ színnel, majd K-t $\chi(K)$, az előzőektől különböző színnel. Kevesebbel nem lehet, hiszen a két komponensben nem lehet ugyanolyan szín az összekötések miatt, a komponenseket pedig már önmagukban sem tudjuk kevesebb színnel színezni.

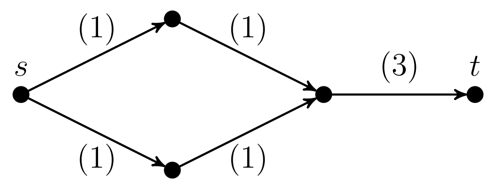
12. **Egy kisváros úthálózata csupa egyirányú utcából áll. A polgármester minden hétköznap reggel autóval megy otthonról a városházára. A fejébe veszi, hogy úgy szeretné ezt megtenni, hogy minden utcán egy hét alatt legfeljebb egyszer menjen végig (a hazafelé utak nem számítanak). Adjunk meg olyan algoritmust, mellyel a kisváros térképe alapján eldönthető, hogy megtehető-e ez!**
Feleltessünk meg egy hálózatot a kisváros térképének! Az élek az utcák megfelelő irányítással, a kezdőpont (s) a ház, a végpont (t) a polgármesteri hivatal. Legyen minden él kapacitása 1! Ekkor pontosan akkor létezik 5 éldiszjunkt út, ha létezik s és t között egy legalább 5 értékű folyam. Ezt a javító utas algoritmussal könnyű ellenőrizni.

13. **Mutassuk meg, hogy ha G véges, egyszerű gráf, akkor $|V(G)| \le \chi(G) \cdot \alpha(G)$, ahol $\alpha(G) = k$, ha G-ben van k db páronként nem szomszédos csúcs, de $k+1$ már nincs.**
Mivel egy helyes színezésben az azonos színhez tartozó csúcsok biztos független halmazt alkotnak, minden színosztály mérete legfeljebb $\alpha(G)$. Azaz

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |\{v | v \in V(G), v \text{ színe } i\}| \le \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) = \chi(G) \cdot \alpha(G).$$

   (Első egyenlőség magyarázata azoknak, akiknek ez a felírás esetleg nem tetszik: mivel a színosztályok a csúcsok egy partícióját adják, ha összeadjuk a színosztályokban szereplő csúcsok számát az összes színosztályra, pont a gráf csúcsainak számát kapjuk meg. Azaz a szummában az egyes színosztályok mérete szerepel.)

14. **Igaz-e, hogy ha egy hálózatban minden él kapacitása páratlan szám, akkor van olyan maximális folyam, aminek minden élén a folyam értéke páratlan szám? És ha páros?**
Az első nem igaz, ellenpélda alant. A második igaz, mert ha minden élnek páros a kapacitása, és kezdetben egy 0 értékű folyamból indulunk, akkor a javítóutas algoritmus minden lépésben páros számmal változtatja a folyamértéket, így minden élen mindig páros érték fog szerepelni, értelemszerűen a maximális esetben is.



15. **Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását csökkentve a maximális folyamnagyság csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását növelve, a maximális folyamnagyság növekszik?**
Első eset: feltételezve, hogy a max folyam nagyobb nullánál, igaz. Ekkor ugyanis egy minimális

vágásban egy tetszőleges él kapacitását csökkentve kisebb lesz a vágás értéke, tehát a maximális folyam értéke is csökken. Második eset: nem igaz, ellenpélda: olyan gráf, ahol legalább két különböző minimális vágás is van.

16. **Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!**
A színeknek definiáljuk egy sorrendjét! Ez lehet pl. a színek indexe. Vegyük a gráf k-színnel való színezését, majd irányítsuk úgy az éleket, hogy mindig a kisebb sorszámúból a nagyobb sorszámúval színezett csúcsba mutasson! Egyenlőség a jó színezés miatt nem állhat elő. Ebben az esetben minden, a gráfban lévő irányított útban a csúcsok színei folyamatosan növekednek, így mivel legfeljebb k színt használhatunk, egy irányított út is legfeljebb k hosszú lehet.

17. **[ppZH 2012. december 12.] Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban f maximális nagyságú folyam és C a G egy olyan irányított köre, amelynek minden élén f pozitív értékeket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy C egyetlen éle sem tartozik minimális kapacitású (értékű) st-vágáshoz.**
Indirekt bizonyítunk: tegyük fel, hogy a C kör uv éle egy minimális kapacitású st-vágáshoz tartozik. Legyen X az az s-t tartalmazó, t-t elkerülő ponthalmaz, ami ezt a minimális kapacitású vágást meghatározza. (2 pont)
Az órán tanultak miatt ha f maximális nagyságú folyam, akkor minden X-ből $V(G) \setminus X$-be futó e él telített, azaz $f(e) = c(e)$ teljesül, míg egyetlen $V(G) \setminus X$-ből X-be futó e' él sem hordoz folyamot, azaz $f(e') = 0$. (4 pont)
Mivel a C irányított körnek van a vágáshoz tartozó, azaz X-ből $V(G) \setminus X$-be futó éle, ezért kell lennie a C körnek olyan g élének is, ami $V(G) \setminus X$-ből X-be fut. (2 pont)
A feladtbeli feltevés szerint a g élen is pozitív nagyságú folyam folyik, ez pedig ellentmond f maximalitásának. (1 pont)
A kapott ellentmondás igazolja a feladatban megfogalmazott állítást. (1 pont)

18. **Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.**
Biztos, hogy bármely két színosztály között kell futnia élnek, hiszen ha lenne két színosztály, amelyek pontjai között nem megy él, akkor az egyiket átszínezhetnénk a másik színére, vagyis kevesebb színnel is színezhetnénk a gráfot.

(A képlet pedig pont ezt számolja: ha bármely két színosztályt kiválasztjuk, akkor legalább egy éllel ők biztosan hozzájárulnak az élszámhoz.)

19. **Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!**
Tudjuk, hogy $\chi(G) \leq \Delta + 1$. Egy reguláris gráfban minden fokszám megegyezik, vagyis $n\Delta = 2e$, amiből $\Delta = 2e/n$, ezt pedig behelyettesítve megkapjuk a kívánt állítást.

20. **Igazoljuk, hogy ha a (G, s, t, c) hálózatban a c kapacitások egészek és f egy megengedett folyam, akkor létezik olyan megengedett f' folyam is, amelyre $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden e élre.**
A feladatból kimaradt, hogy f' legyen egész folyam, elnézést.

Konstruktívan bizonyítunk, azaz adunk egy algoritmust, ami pont egy nekünk megfelelő folyamot csinál véges lépésben. Ha tekintjük azt a részgráfot, amiben csak a tört folyamértékkel rendelkező élek vannak, akkor ebben kizárólag $s-t$ utak és (az élek irányításától eltekintve) körök lehetnek. Akár egy $s-t$ úton, akár egy körön (Kirchhoff szabállyal) megtehetjük, hogy egy egész számhoz legközelebbi folyamértékkel rendelkező élen levő folyamértéket úgy megváltoztatunk, hogy egész legyen a folyamérték. Ezt a változtatást megfelelően átvezetjük az adott út vagy kör összes többi élére is, miközben egyik folyamérték sem fog kilépni a korlátai közül (ezért választottuk azt, amelyik a legközelebb volt egy egész számhoz).

A fenti módszer egy alkalmazásával csökkenteni tudjuk legalább eggyel a tört értékkel rendelkező élek számát, vagyis legfelebb $|E|$ lépésben el tudjuk érni a kívánt folyamot.

(Példa: $s \xrightarrow{2.3}\xrightarrow{10.1}\xrightarrow{0.5} t$ esetén -0.1 lesz a változtatás, az eredmény pedig $s \xrightarrow{2.2}\xrightarrow{10}\xrightarrow{0.4} t$.

Másik példa körrel: $a \xrightarrow{2.8}\xleftarrow{10.3}\xrightarrow{0.4}\xrightarrow{15.4} a$ esetén $+0,2$ lesz a változtatás, az eredmény pedig – az élirányok figyelembevételével! – $a \xrightarrow{3}\xleftarrow{10.1}\xrightarrow{0.6}\xrightarrow{15.6} a$.)