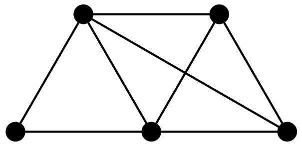
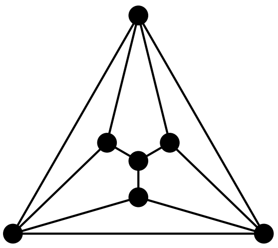
SzA VIII. gyakorlat, 2014. október. 31.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Gráfokat színezünk, továbbá folyton folyvást folyamok

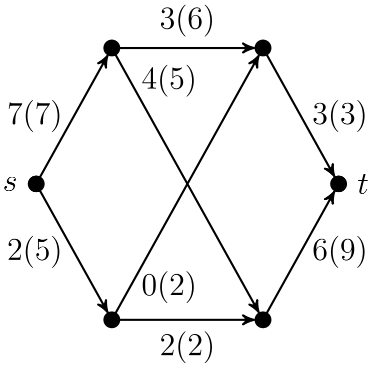
1. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:
   C_4, C_5, alábbi 2 gráf

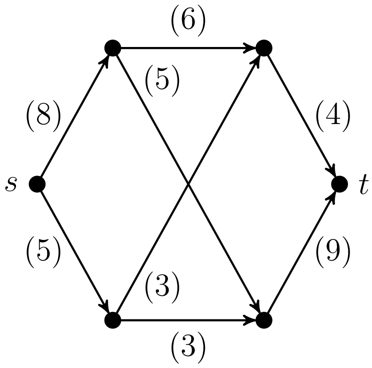




2. Van-e olyan G gráf, amiben nincs 4 csúcsú teljes részgráf, de G mégsem színezhető ki 3 színnel?

3. Növeljük a bal oldali gráfban a megadott folyamot, ha ez lehetséges, vagy mutassuk meg, hogy ez már egy maximális folyam!





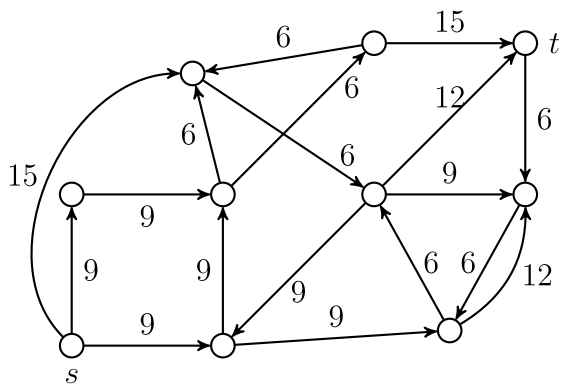
4. Adjunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a fenti jobb oldali gráfban!

---

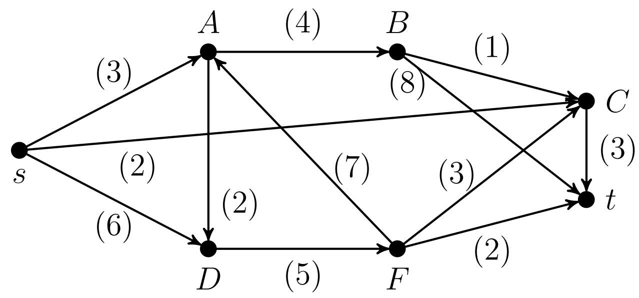
5. G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G-ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?

6. **[ppZH 2012. december 12.]** Legyenek a G_n egyszerű gráf csúcsai az (i, j) számpárok, ahol i és j 1 és n közötti egészek. A G_n gráf (i, j) és (k, l) egymástól különböző csúcsai pontosan akkor szomszédosak, ha $i = k$ vagy $j = l$. Rajzoljuk le G_3 egy áttekinthető diagramját, valamint határozzuk meg G_3 kromatikus számát, $\chi(G_3)$-t.

7. **[ZH 2008. október 10.]** Igaz-e, hogy az alábbi ábrához tartozó (G, s, t, c) hálózatban a maximális folyamnagyság (folyamérték) pontosan 17? (Az élekre írt számok a megfelelő kapacitásokat jelölik.)



8. Határozzunk meg egy maximális folyamot és egy minimális vágást a következő hálózatban!



9. Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G-nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszédságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!

10. **[pZH 2011. december 1.]** A $G = (V, E)$ irányított gráf csúcshalmaza $V = \{v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}\}$ és $i < j$ esetén a $v_i v_j$ él kapacitása $c(v_i v_j) = (i, j)$, más éle G-nek nincs. Ha a $v_{15}v_{16}$ él kapacitását tetszés szerint megváltoztathatjuk, mennyi lehet a v_{12}-ből v_{16}-ba vezető maximális folyam nagysága? Mekkora az a legkisebb kapacitás a $v_{15}v_{16}$ élen, amire ez a maximális folyamnagyság elérhető?
Megjegyzés: (i, j)-vel jelöljük i és j számok legnagyobb közös osztóját.

11. Legyenek K és H a G gráf két komponense. Legyen G' az a gráf, amit G-ből úgy kapunk, hogy K minden pontját összekötjük H minden pontjával. Bizonyítsuk be, hogy $\chi(G) = \max\{\chi(K), \chi(H)\}$ ill. $\chi(G') = \chi(H) + \chi(K)$.

12. Egy kisváros úthálózata csupa egyirányú utcából áll. A polgármester minden hétköznap reggel autóval megy otthonról a városházára. A fejébe veszi, hogy úgy szeretné ezt megtenni, hogy minden utcán egy hét alatt legfeljebb egyszer menjen végig (a hazafelé utak nem számítanak). Adjunk meg olyan algoritmust, mellyel a kisváros térképe alapján eldönthető, hogy megtehető-e ez!

13. Mutassuk meg, hogy ha G véges, egyszerű gráf, akkor $|V(G)| \leq \chi(G) \cdot \alpha(G)$, ahol $\alpha(G) = k$, ha G-ben van k db páronként nem szomszédos csúcs, de $k + 1$ már nincs.

14. Igaz-e, hogy ha egy hálózatban minden él kapacitása páratlan szám, akkor van olyan maximális folyam, aminek minden élén a folyam értéke páratlan szám? És ha páros?

15. Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását csökkentve a maximális folyamnagyság csökken? Igaz-e, hogy tetszőleges (nem 0 értékű folyammal rendelkező) hálózatban van olyan él, aminek a kapacitását növelve, a maximális folyamnagyság növekszik?

16. Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k. Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!

17. **[ppZH 2012. december 12.]** Tegyük fel, hogy a (G, s, t, c) hálózatban f maximális nagyságú folyam és C a G egy olyan irányított köre, amelynek minden élén f pozitív értékeket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy C egyetlen éle sem tartozik minimális kapacitású (értékű) st-vágáshoz.

18. Igazoljuk, hogy ha G egyszerű gráf, akkor $|E(G)| \geq \binom{\chi(G)}{2}$.

19. Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!

20. Igazoljuk, hogy ha a (G, s, t, c) hálózatban a c kapacitások egészek és f egy megengedett folyam, akkor létezik olyan megengedett f' folyam is, amelyre $\lfloor f(e) \rfloor \leq f'(e) \leq \lceil f(e) \rceil$ teljesül minden e élre.