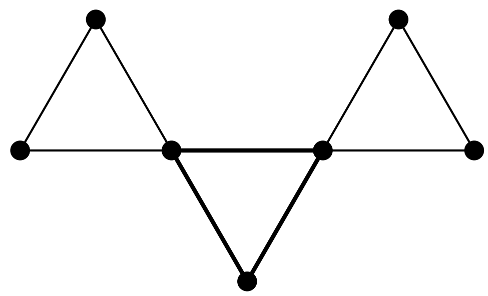
SzA VII. gyakorlat, 2014. október. 18.

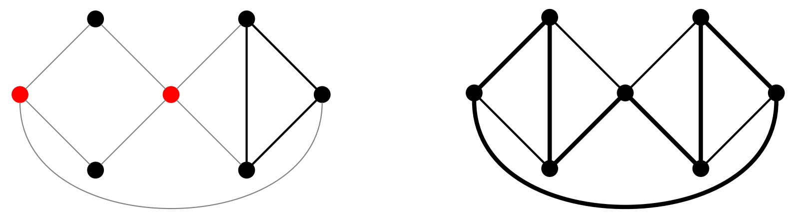
Körözünk, valamint hurrá, ZH!

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **[ZH 2006. március 28.] Legyen G egy összefüggő gráf, amiben minden pont foka páros. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk G-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta?**
   Nem, egy ellenpélda, ami teljesíti a feltételeket, de a vastag élek által alkotott kört elhagyva a gráf mégsem lesz öf:



2. **Mutassunk Hamilton-kört a következő gráfokban, vagy lássuk be, hogy nincs!**



   A bal oldaliban pirossal jelölve két csúcs, amiket elhagyva a gráf 3 részre esik szét, vagyis nem lehet benne H-kör. A jobb oldalon pedig vastaggal jelölve egy H-kör.

3. **Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?**
   Természetesen 6. 5 nyilván nem elég, C_6 viszont jó is.

4. **Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?**
   11 létezik, pl K_5-höz kapcsolva egy éllel egy csúcsot pont ilyet kapunk. 12 él esetén a gráfunk pont 3 éllel tartalmaz kevesebbet, mint K_6. Ha tehát K_6-ból úgy hagyunk el 3 élet, hogy nem mind egy ponthoz kapcsolódik, akkor a fokszámok legfeljebb 2-vel csökkennek, vagyis minden pont foka legalább 3 lesz. Ekkor a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör. Ha az elhagyott 3 él 1 pontra illeszkedett, akkor a fokszámok: $2, 4, 4, 4, 5, 5$. Az Ore-tétel miatt ebben az esetben is van Hamilton-kör.

---

5. **Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leülhetnek egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!**
   Definiáljunk egy gráfot, amiben minden embernek egy csúcsot feleltetünk meg, és két csúcs akkor van összekötve, ha ismerik egymást. Ha ebben a gráfban találunk Hamilton-kört, akkor a kör mentén le tudjuk őket ültetni. 12 csúcsunk van és minden fokszám legalább 6, így a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör a gráfban, tehát létezik ilyen leültetés.

6. **Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!**

Ha mindenki legalább $n/2$ embert ismer, akkor ez lehetséges ugyanúgy, mint a korábbi feladatban. Ha kevesebb, mint $n/2$-t, akkor vegyük az előbb definiált gráf komplementerét, és az itt talált Hamilton-kör pont egy olyan leültetésnek fog megfelelni, ahol senki nem ismeri a mellette lévőket. A komplementerben már teljesül a Dirac-tétel feltétele, így itt is létezik Hamilton-kör.

7. **Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?**
   Van, pl egy C_4-et és egy C_3-at egy csúcsuknál összeragasztunk.

8. **[ZH 2012. november 22.] Tfh az egyszerű G gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül u és v foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy G-ben van Hamilton-út.**
   Ore tanult tétele szerint ha egy n pontú egyszerű G gráf bármely két nem szomszédos csúcsának fokszámösszege legalább n, akkor G-nek van Hamilton köre. (3 pont)
   Ha tehát u és v szomszédosak, akkor teljesül az Ore tétel, van tehát G-ben Hamilton kör, (2 pont)
   ebből egy élt törölve pedig G Hamilton útját kapjuk. (1 pont)
   Ha pedig u és v nem szomszédosak, akkor húzzunk be közéjük egy élt, és nevezzük G'-nek a kapott gráfot. (2 pont)
   Mivel G'-re már teljesül az Ore feltétel, ezért G'-ben van Hamilton kör, (1 pont)
   ami még az uv él törlése után is tartalmazza G egy Hamilton útját. Ezzel mindkét esetben igazoltuk a feladat állítását. (1 pont)

9. **[ZH 2013. november 28.] Tudjuk, hogy az $n \geq 20$ pontú G egyszerű gráfban minden pont foka legalább $(n+4)/2$. Bizonyítsa be, hogy G -ben van két olyan Hamilton-kör, amelyeknek nincsen közös élük!**
   Mivel minden fokszám legalább $(n+4)/2 > n/2$, a Dirac tétel szerint G-ben van Hamilton kör. (2 pont)
   Hagyjuk el G-ből ennek a Hamilton körnek az éleit. (2 pont)
   Ezzel minden pont foka pontosan 2-vel csökken. (2 pont)
   Tehát a megmaradt gráfban minden fokszám legalább $(n+4)/2 - 2 = n/2$, vagyis továbbra is teljesül a Dirac feltétel, találhatunk egy újabb Hamilton kört. (3 pont)
   Ez természtesen éldiszjunkt az előzőtől (1 pont)

10. **Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!**
    Vegyünk a gráfhoz egy pontot, ahonnan húzzunk éleket az összes eredeti pontba. Az új gráf csúcsainak száma $2k+2$, a fokszámok pedig eggyel növekedtek (az új pont foka $2k+1$), így mindegyik legalább $k+1$. A Dirac-tétel szerint ebben a gráfban van Hamilton-kör, ami biztos átmegy az új csúcson is. Ha ezt a csúcsot az éleivel elhagyjuk, akkor a Hamilton-kör „maradéka” pont egy Hamilton-út lesz az eredeti gráfban.

11. **[pZH 2011. december 1.] Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű G gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt G-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.**
    Tanultuk, hogy összefüggő gráfnak pontosan akkor van Euler-köre, ha minden fokszáma páros. (1 pont)
    Ezek szerint G-ben minden fokszám páros. (2 pont)
    A $\bar{G}$ komplementergráfban a v csúcs foka $d_{\bar{G}}(v) = 98 - d_G(v)$, (2 pont)
    ezért $\bar{G}$-ben is páros lesz minden csúcs foka. (2 pont)
    Egyedül annak igazolása van hátra, hogy $\bar{G}$ összefüggő. Ez következik pl. a Dirac-tételből, hiszen $\bar{G}$-ben minden fok legalább $98 - 30 = 68 > \frac{99}{2}$. (3 pont)

Az utolsó 3 pont úgy is megszerezhető, hogy ha a $\bar{G}$-beli minimális fokszám több, mint $\frac{n}{2}$ (márpedig ez igaz), akkor bármely két nem szomszédos pontnak van közös szomszédja, és ebből azonnal következik az öf tulajdonság.

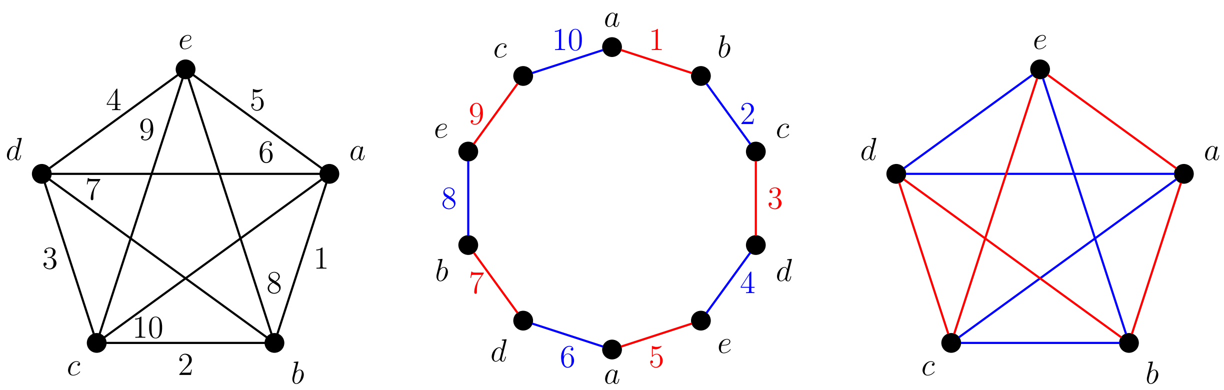
Megjegyzés (DM): a gráfokkal való ismerkedéskor is szép részletesen bizonyítottuk gyakorlaton, hogy ha minden fokszám legalább $n/2$, akkor a gráf összefüggő.

12. **Legyen G a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_ip_j \in E(G)) \iff |i-j| \le 2$. Van-e G-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út?**
G öf, de a 2 és a 2000 csúcsok foka 3. A többié ps. Szóval nincs Euler-körséta, de van Euler-séta. Könnyű Hamilton-kört is gyártani: oda a páratlanokon, vissza a párosakon jövünk.

13. **Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.**
Bár a feladat nem mondja, de feltételezzük, hogy egyszerű gráfról beszélünk (egyébként nem lenne igaz: pl. rajzoljunk egy n hosszú kör minden csúcsához egy hurokélet).

Ha több komponensből áll, akkor a komponenseket külön, egymástól függetlenül kezelhetjük, így a továbbiakban feltételezzük, hogy a gráf összefüggő. A gráfban így van E-kör, mert minden fokszám páros. Vegyünk egy E-kört, és az éleit felváltva színezzük pirosra és kékre! Ez a színezés helyes lesz. Ezt pl. úgy láthatjuk be, hogy az E-körsétát felrajzoljuk egy valódi körként (az eredeti gráf egy pontja így többször is fog szerepelni: pontosan annyiszor, ahányszor átmentünk rajta). Az eredeti gráf minden pontjába pontosan kétszer mentünk be, így minden pont pontosan kétszer fog szerepelni ezen a körön, de sosem egymás mellett (ez hurokélet jelentene). Azaz minden pontnak pontosan kétszer lesz egy piros és kék éle, vagyis összességében minden pontnak két piros és két kék éle lesz.

A könnyebb megértéshez érdemes megnézni a következő ábrát (az élekre írt számok azt jelentik, hogy hanyadikként haladtunk át az adott élen az E-kör szerint):



14. **Bizonyítsuk be, hogy ha egy 3-reguláris G gráfban van Hamilton-kör, akkor G élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk!**
A 3-reguláris gráfnak ps sok csúcsa van a fokszámösszeg párossága miatt. A Hamilton kör élei ezért piros-fehérre színezhetők, a kimaradók lesznek a zöldek.

15. **Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G-v$ ill. a $G-e$ gráf G bármely v csúcsára és bármely e élére is összefüggő.**
Észrevesszük, hogy a gráfot lecsupaszíthatjuk addig, amíg csak a H-kör marad meg (azaz töröljük a H-körön kívüli éleket) – ettől legfeljebb széteshetne a gráf. Viszont a H-körre már önmagában is igaz, hogy se éltörléstől, se csúcstörléstől nem esik szét.

16. **Tegyük fel, hogy G öf gráf és K egy olyan köre G-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út G egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy K a G Hamilton-köre.**
Tfh nem igaz, azaz K nem H-kör. Ekkor van olyan e él K valamelyik v csúcsából, ami K-n kívüli csúcsba fut (az összefüggőség és K nem H-körsége miatt). Töröljük az egyik v-re illeszkedő élet K-ban (így lesz egy $k-1$ hosszú utunk, ami a feltétel szerint a leghosszabb). Ezt kiegészítve e-vel egy k hosszú utat kapunk, ami ellentmondás.

17. **Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!**
Teljes indukcióval. $n = 1$ csúcs esetén triviálisan igaz. Tfh valamilyen n-re igaz, vizsgáljuk meg $n+1$-re! Az $n+1$ csúcsú teljes gráfból elhagyva egy tetszőleges x pontot egy n csúcsút kapunk, amiben az indukciós feltétel miatt van irányított H-út. Ha x-ből pont ezen H út elejére mutat él, vagy a H-út végéből pont x-be mutat él, akkor x-et a H-út elejére vagy végére téve pont egy jó irányított H-utunk lesz. Baj csak akkor van, ha az ábrán látható eset áll elő. Ekkor viszont biztos van az úton olyan i csúcs, hogy i-ből x-be mutat él, és x-ből $i+1$-be (ha nem így lenne, akkor a már kezelt esetek egyikét kapnánk). Ide beillesztve x-et egy jó H-utat kapunk.