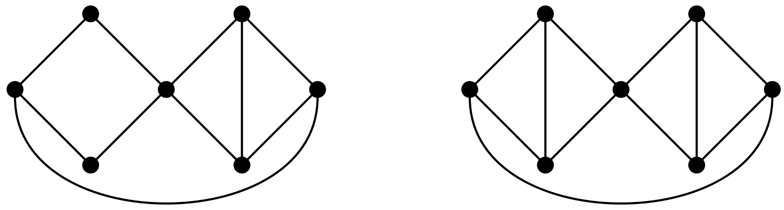
# SzA VII. gyakorlat, 2014. október. 18.
## Körözünk, valamint hurrá, ZH!

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **[ZH 2006. március 28.]** Legyen $G$ egy összefüggő gráf, amiben minden pont foka páros. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk $G$-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta?
2. Mutassunk Hamilton-kört a következő gráfokban, vagy lássuk be, hogy nincs!



3. Legalább hány éle van egy olyan hat pontú gráfnak, melynek van Hamilton-köre?
4. Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?

---

5. Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leülhetnek egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!
6. Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!
7. Van-e olyan egyszerű gráf, melynek van Euler-körsétája, továbbá páros számú pontja és páratlan számú éle van?
8. **[ZH 2012. november 22.]** Tfh az egyszerű $G$ gráfnak 100 csúcsa van, ezek közül $u$ és $v$ foka 45, a többi csúcsé pedig legalább 55. Igazoljuk, hogy $G$-ben van Hamilton-út.
9. **[ZH 2013. november 28.]** Tudjuk, hogy az $n \geq 20$ pontú $G$ egyszerű gráfban minden pont foka legalább $(n+4)/2$. Bizonyítsa be, hogy $G$ -ben van két olyan Hamilton-kör, amelyeknek nincsen közös élük!
10. Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $k$, akkor a gráfban van Hamilton-út!
11. **[pZH 2011. december 1.]** Tudjuk, hogy a 99 csúcsú, egyszerű $G$ gráf maximális fokszáma $\Delta(G) = 30$, másrészt $G$-nek van Euler-köre. Mutassuk meg, hogy a $\bar{G}$ komplementergráfnak is van Euler-köre.
12. Legyen $G$ a $\{p_1, p_2, \ldots, p_{2001}\}$ ponthalmazon az az egyszerű gráf, amire $(p_i p_j \in E(G)) \iff |i-j| \leq 2$. Van-e $G$-ben Euler-körséta, Euler-séta, Hamilton-kör ill. Hamilton-út?
13. Igazoljuk, hogy ha egy gráf minden pontjának foka 4, akkor élei színezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy minden él teljes hosszában egyszínű legyen és minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.
14. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 3-reguláris $G$ gráfban van Hamilton-kör, akkor $G$ élei három színnel színezhetők úgy, hogy azonos színű éleknek ne legyen közös végpontjuk!
15. Mutassuk meg, hogy ha egy $G$ gráfban van Hamilton-kör, akkor a $G-v$ ill. a $G-e$ gráf $G$ bármely $v$ csúcsára és bármely $e$ élére is összefüggő.

16. Tegyük fel, hogy $G$ öf gráf és $K$ egy olyan köre $G$-nek, aminek tetszőleges élét törölve, a kapott út $G$ egy leghosszabb útja. Bizonyítsuk be, hogy $K$ a $G$ Hamilton-köre.

17. Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!