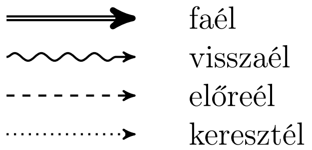
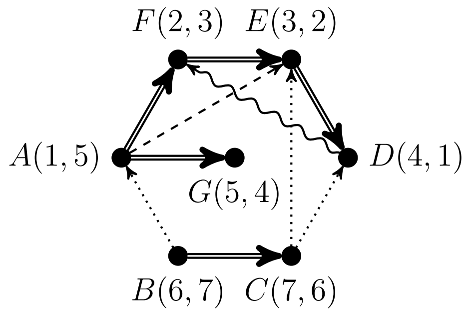
# SzA VI. gyakorlat, 2014. október. 17.
## DAG! PERT!

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Végezzünk mélységi bejárást a következő gráfon $A$ csúcsból indulva, és osztályozzuk az éleit!**

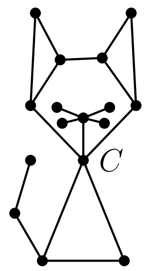
   Lásd az ábrát. A számok $(msz, bsz)$ formában vannak megadva.



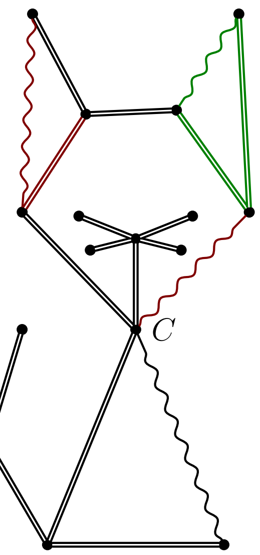




   *Megjegyzés: mikor elakadtunk, akkor véletlenszrűen választottunk egy még nem bejárt csúcsot, ahonnan folytattuk a bejárást. Az véletlen, hogy ebben a példában keresztélek csak a két fa között mennek, például ha lenne $(G, F)$ élünk, az is keresztél lenne.*

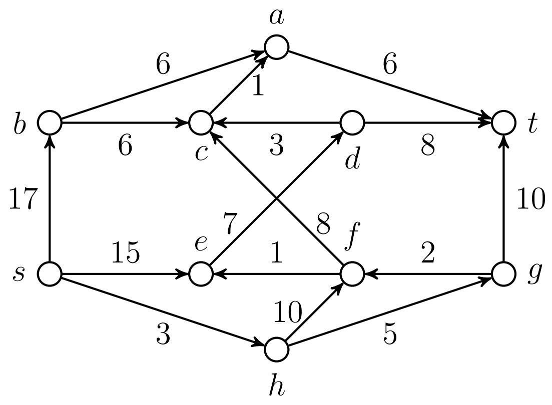
2. **Határozzunk meg egy alapkörrendszert és fundamentális vágásrendszert a következő gráfban úgy, hogy a $C$ pontból indulva készítünk egy mélységi feszítőfát!**



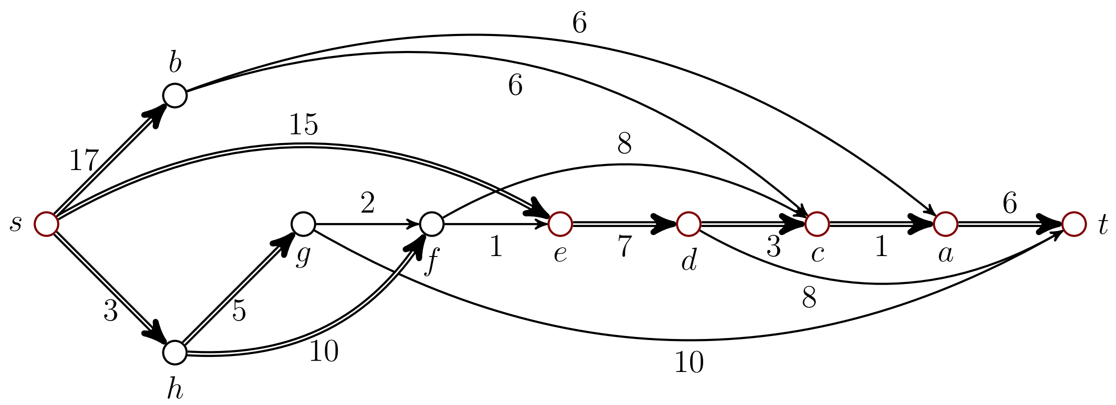

   Egy lehetséges bejárás eredménye látható a következő ábrán. Minden egyes visszaél meghatároz egy alapkört, példaként zöldesen megjelölve egy. Az összes alapkör együtt alkotja az alapkörrendszert. Továbbá minden egyes faél meghatároz egy fundamentális vágást (azokkal a visszaélekkel együtt – ha esetleg vannak ilyenek –, akik az adott ágban „mellette” futnak), példaként pirosasan megjelölve egy. Az összes fundamentális vágás együtt alkotja a fundamentális vágásrendszert (ebben a példában egész sok fundamentális vágásunk van).




3. **[ZH 2011. november 24.] Határozzuk meg az ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek!**




Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk $G$ egy topologikus sorrendjét (emeletekre bontással vagy mélységi bejárással, ahogy jólesik). Lásd az ábrát. (2 pont)
Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)
Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 32$, (1 pont)
és mivel egyetlen kritikus út vezet $s$-ből $t$-be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz $s, e, d, c, a, t$. (2 pont)




| $s$ | $b$ | $h$ | $g$ | $f$ | $e$ | $d$ | $c$ | $a$ | $t$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 17 | 3 | 8 | 13 | 15 | 22 | 25 | 26 | 32 |

4. **Legyen $G$ DAG, és tegyük fel, hogy az $u$ és $v$ csúcsok között egyik irányban sincs irányított út $G$-ben. Mutassuk meg, hogy $G$-nek van olyat topologikus sorrendje, amelyben $u$ megelőzi $v$-t, és olyan is, amelyben $v$ előzi meg $u$-t.**
A mélységi bejárás segítségével az órán tanultak szerint tudunk topologikus sorrendet meghatározni. Amennyiben $u$-ból indítjuk a bejárást, akkor $v$ előbb fog szerepelni, mint $u$, ha pedig $v$-ből, akkor pont fordítva. Mivel mindkét esetben egy helyes topologikus sorrendet kapunk, az állítást ezzel igazoltuk.

5. **Egy falutörténet írója $n$ korábbi lakosról gyűjtött információkat. A kérdésekre kapott válaszok a következő típusúak voltak:**
   - **$S_i$ személy meghalt $S_j$ születése előtt;**
   - **$S_i$ személy élete során született $S_j$;**
   - **$S_i$ személy korábban született, mint $S_j$;**
   - **$S_i$ korábban halt meg, mint $S_j$.**

**Egy $S_i, S_j$ párra nem biztos, hogy szerepel minden választípus, és olyan pár is lehet, amely egyetlen válaszban sem szerepel együtt. Mivel az emberek időnként rosszul emlékeznek, nem biztos, hogy minden kapott információ helyes. Adjunk algoritmust, amivel $k$ db fenti típusú válaszról $c \cdot (n + k)$ lépésben eldönthető, hogy van-e közöttük ellentmondás.**

Vegyünk fel egy $2n$ csúcsú gráfot, ahol az egyes csúcsok adott személy születésének és halálának felelnek meg ($S_i$-re $v_{i,sz}$ és $v_{i,h}$). A gráf élei jelentik az időbeli megelőzést, azaz $v_k$-ból $v_l$-be futó él azt jelenti, hogy $v_k$ esemény $v_l$ előtt történt. A születési és halál csúcsokat személyenként értelemszerűen összekötjük. A többi él az információkból jön, pl. $S_i$ *személy élete során született* $S_j$ esetén egy $(v_{i,sz}, v_{j,sz})$ és $(v_{j,sz}, v_{i,h})$ élet húzunk be (a többi is értelemszerűen). Az információkban pontosan akkor nincs ellentmondás, ha a gráf DAG (egyik irány: ha lenne ellentmondás, akkor az kört jelentene a gráfban; másik irány: ha kör van a gráfban, az egy esemény saját maga előtti bekövetkeztét jelenti, azaz ellentmondás). $|V| = 2n$, $|E| \le c \cdot (n + 2k)$ („élet” élek és állításonként legfeljebb két él), DAG-ság eldöntése mélységi bejárással $c \cdot (|V| + |E|) \le c' \cdot (n + k)$ (alkalmas $c'$ választással).

---

6. **$G$ egy összefüggő, irányított gráf, melynek van olyan mélységi bejárása, amelynek során keletkezett feszítőerdő csupa izolált pontból áll. Az ilyen $n$ pontú gráfok közül hogy néz ki a minimális, illetve a maximális élszámú?**
Összefüggőség miatt fánál kevesebb él nem jöhet szóba, az $n - 1$ hosszú út (a bejárás során „visszafele” haladva) pont jó. A maximális élszámúhoz meg kell gondolni, hogy DAG-nak kell lennie (irányított kör elrontaná az izoláltságot minden bejárásnál, ugyanis lenne visszaél, lásd tétel), tehát írjuk fel a topologikus sorrendben a pontokat, és ha minden lehetséges előrefele mutató élet behúzunk (azaz az $i$ csúcsból vezet irányított él minden $i + 1 \ldots n$ csúcsba), akkor még pont jók vagyunk, többet a minden lehetségesnél meg nem tudunk behúzni.

7. **[pZH 2010. ősz] Legyenek az $F$ fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \le i \le 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \le j \le 10$. Tegyük fel, hogy $F$ a $G$ egyszerű, irányítatlan gráf $v_1$-ből indított mélységi (DFS) bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet $G$-nek?**
Tanították, hogy a mélységi bejárás fájához nem tartoznak keresztélek (*megjegyzés, DM: irányítatlan gráf!*), azaz olyan élek, amik a fa olyan csúcsait kötik össze, amik nem leszármazottai egymásnak. (3 pont)
Ezek szerint $G$-ben nem futhat él a $v_6, v_7, \ldots, v_{10}$ pontok között. (2 pont)
A $G$ gráfnak tehát nem lehet több éle, mint annak a gráfnak, amit 10 pontú teljes gráfból úgy kapunk, hogy elhagyjuk a fenti 5 pont közt futó éleket. (2 pont)
Az élszám tehát legfeljebb $\binom{10}{2} - \binom{5}{2} = 45 - 10 = 35$ lehet. (1 pont)
Ennyi éle pedig lehet is $G$-nek. Ha ugyanis $G$ pontosan a fent leírt gráf, akkor a megadott $F$ lehet a $G$ mélységi fája. (2 pont)

A fa helyes lerajzolásáért adjunk 1 pontot, ha nincs más értékelhető teljesítmény.

8. **Adjunk olyan eljárást, amely tetszőleges PERT probléma esetén minden tevékenységhez meghatározza azt a legkésőbbi időpontot, amikor az adott tevékenységet elkezdve a teljes PERT feladat legrövidebb idő alatti végrehajtása még éppen nem kerül veszélybe.**
Ugyanúgy járunk el mint a PERT-ben, csak a topologikus sorrend fordítottjából indulunk ki, 0 időpontot állítunk be a nyelőnek, és minden csúcsra így egy számot kapunk, ami azt mondja meg, mennyi idő kell még ahhoz, hogy az adott tevékenység kezdésétől befejezzük a projektet. A teljes projekt végrehajtásához szükséges időből levonva ezeket a számokat éppen a keresett időpontokat kapjuk.

9. **[pZH 2013. december 6.] A $G$ irányított gráfban van olyan él, aminek az elhagyásával a maradékban nincs irányított kör. Igaz-e, hogy a mélységi bejárás során biztosan**

**nem lehet egynél több visszaél?**

Legyenek a $G$ csúcsai $x, y, z$, irányított élei $xy, yz, zy, zx$. (4 pont)
Ha elhagyjuk az $yz$ élet, akkor nem lesz irányított kör. (Emeletekre bontható: $z, x, y$.) (3 pont)
Ugyanakkor, ha $x$-ből indítunk egy mélységi bejárást, akkor a mélységi fa élei az $xy$ és $yz$ lesznek, két visszaél is van, $zy$ és $zx$. (3 pont)

10. **Tekintsük az olyan $G$ irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan $G'$ gráf összefüggő. A $G$ gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, amelyre a mélységi és a befejezési szám megegyezik?**
$n$, ilyen például egy irányított út, ahol pont az iránnyal ellentétesen vesszük a csúcsokat. Több nem lehet, hiszen $n$ csúcsa van a gráfnak.

11. **Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ irányított gráf felbontható két DAG-ra; pontosabban az élhalmazának van olyan $E_1, E_2$ partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok DAG-ok!**
Indukcióval a pontszámra. $n = 1$-re triviálisan igaz. Tfh $n$-re igaz, kérdés, hogy igaz-e $n + 1$ pontra? Ha van egy $n+1$ pontú irányított gráfunk, akkor véletlenszerűen válasszuk ki egy pontját. A maradék $n$ az indukciós feltevés szerint felbontható megfelelően két DAG-ra (persze simán lehet, hogy az egyik, másik, vagy mindkettő akár 0 élet tartalmaz, de ez minket nem zavar), ezeknek van egy topologikus sorrendje. Az $n + 1$-edik pont bejövő éleit rendeljük az egyik DAG-hoz, ettől az DAG marad (a topologikus sorrendben az aktuális lesz az utolsó pont, a többit nem zavarja), a kimenő éleket pedig a másik DAG-hoz (hasonlóan az is DAG marad). Így az állítást igazoltuk (és mellesleg a bizonyításunk konstruktív is, azaz ez alapján tényleg tudunk csinálni egy ilyen felbontást).

    *Egy másik lehetséges, szintén konstruktív bizonyítás*: számozzuk meg a pontokat egyedileg 1-től $n$-ig. Minden $e = (i, j)$ élről egyenként eldöntjük, hogy $E_1$-be vagy $E_2$-be tartozzon. Ezt tegyük úgy, hogy $i < j$ esetén $e$-t $E_1$-hez, $i > j$ esetén $E_2$-höz rendeljük ($i = j$ nem lehetséges). $G_1$ jó topologikus sorrendje $1, \ldots, n$, így az ismert tétel miatt $G_1$ DAG. Hasonlóan, $G_2$ jó topologikus sorrendje $n, \ldots, 1$, így ez is DAG.

---

12. **Van $b$ darab borítékunk, az $i$-ediknek a hossza $h_i$, a magassága $m_i$. Az $i$-edik borítékba akkor tudjuk berakni a $j$-edik borítékot, ha $h_j < h_i$ és $m_j < m_i$ is teljesül (nem forgatjuk és nem is hajtogatjuk a borítékokat). Célunk, hogy minél hosszabb olyan láncot alakítsunk ki, hogy az $i$-edikben benne van a $j$-edik, abban a $k$-adik, stb.**

    **Legyen adott egy $L > 0$ egész és a $h_i$ és $m_i$ számok. Hogyan lehet eldönteni, hogy kialakítható-e a borítékokból egy $L$ hosszú lánc?**
Építünk egy gráfot, melynek csúcsai a borítékok, és $i$ csúcsból pontosan akkor megy él $j$-be, ha a $j$ boríték belerakható $i$-be. Ekkor egy irányított út a gráfban megfelel egy helyes borítékláncnak, továbbá egy helyes borítéklánc mindig felírható egy irányított útként a gráfban. Ez a gráf DAG, hiszen ha lenne benne irányított kör, akkor ez azt jelentené, hogy valamely boríték belefér saját magába.

    Innen már látszik, hogy ebben a gráfban leghosszabb utat kell keresni, és ha ez legalább $L$ hosszú, akkor van ilyen lánc (és meg is találtuk), egyébként nincs.

13. **Egy számítógéphálózatban $n$ számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az $i$-edik gép üzenetet küld a $j$-ediknek $(i, j, t)$ formában feljegyezünk, ahol a $t$ egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a $t$ időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a $t$ időpontban az $i$-edik gép vírusos volt, akkor egy $(i, j, t)$ üzenet hatására a $j$-edik gép mefertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t + 1$ időponttól kezdve már a $j$-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az $(i, j, t)$ hármasoknak egy $m$**

**hosszú listája, valamint $x, y$ és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az $x$-edik gép a $t_0$ időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az $y$-adik gép a $t_1$ időpontban vírusos. Adjunk algoritmust, ami ezt a kérdést megválaszolja!**

Vegyünk fel egy gráfot, csúcsai a számítógépek minden időpillanatban $t_0$ és $t_1$ között, élei (irányítottak) az üzenetek. Vegyünk fel még éleket az ugyanahhoz a géphez tartozó szomszédos időpontok között is előrefele! Ebben a gráfban az $x$ gépből pontosan azok érhetők el irányított úton, akik lehetnek vírusosak (ezt kicsit érdemes indokolni). Így $x$-ből egy bejárást indítva megtaláljuk a kérdéses gépeket.