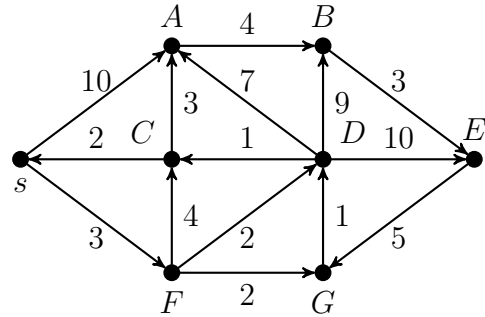


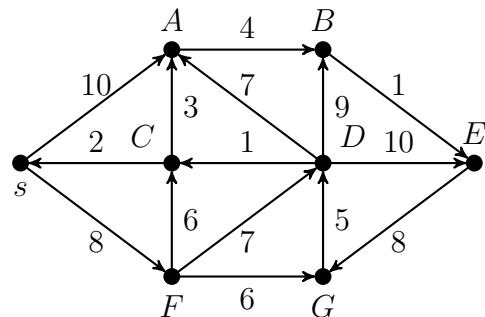
1. Határozzuk meg a Dijkstra algoritmussal a legrövidebb utakat s és a többi csúcs között, nyomon követve az algoritmust!



s	A	B	C	D	t	F	G	KÉSZ
<u>0</u>	10	∞	∞	∞	∞	3	∞	s
<u>0</u>	10	∞	7	5	∞	<u>3</u>	5	s, F
<u>0</u>	10	14	6	<u>5</u>	15	<u>3</u>	5	s, D, F
<u>0</u>	10	14	6	<u>5</u>	15	<u>3</u>	<u>5</u>	s, D, F, G
<u>0</u>	9	14	6	<u>5</u>	15	<u>3</u>	<u>5</u>	s, C, D, F, G
<u>0</u>	<u>9</u>	13	<u>6</u>	<u>5</u>	15	<u>3</u>	<u>5</u>	s, A, C, D, F, G
<u>0</u>	<u>9</u>	<u>13</u>	<u>6</u>	<u>5</u>	15	<u>3</u>	<u>5</u>	s, A, B, C, D, F, G
<u>0</u>	<u>9</u>	<u>13</u>	<u>6</u>	<u>5</u>	<u>15</u>	<u>3</u>	<u>5</u>	s, A, B, C, D, t, F, G

Feltéve, hogy nem számoltam el semmit.

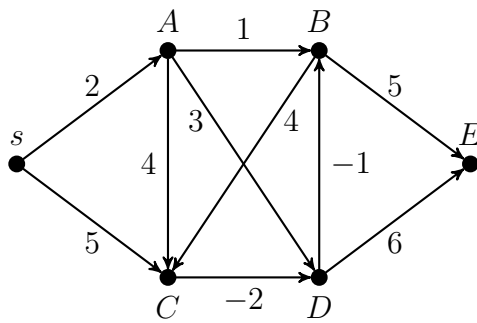
2. Határozzuk meg a Dijkstra algoritmussal a legszélesebb utakat s és a többi csúcs között, nyomon követve az algoritmust!



s	A	B	C	D	E	F	G	KÉSZ
<u>0</u>	10	∞	∞	∞	∞	8	∞	s
<u>0</u>	<u>10</u>	4	∞	∞	∞	8	∞	s, A
<u>0</u>	<u>10</u>	4	6	7	∞	<u>8</u>	6	s, A, F
<u>0</u>	<u>10</u>	7	6	<u>7</u>	7	<u>8</u>	6	s, A, D, F
<u>0</u>	<u>10</u>	<u>7</u>	6	<u>7</u>	7	<u>8</u>	6	s, A, B, D, F
<u>0</u>	<u>10</u>	<u>7</u>	6	<u>7</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	7	s, A, B, D, E, F
<u>0</u>	<u>10</u>	<u>7</u>	6	<u>7</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	s, A, B, D, E, F, G
<u>0</u>	<u>10</u>	<u>7</u>	<u>6</u>	<u>7</u>	<u>7</u>	<u>8</u>	<u>7</u>	s, A, B, C, D, E, F, G

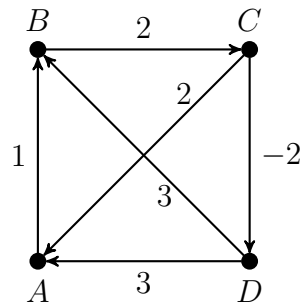
Feltéve, hogy nem számoltam el semmit.

3. Határozzuk meg a következő gráfban Bellmann-Ford algoritmussal a legrövidebb utat s és a többi csúcs között, nyomon követve az algoritmust!



Külön pdf-ben, nagyon részletesen.

4. Határozzuk meg a Floyd algoritmussal a legrövidebb utat az összes pontpár között a következő gráfban!



Kiinduló táblázat:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty \\ 2 & \infty & 0 & -2 \\ 3 & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

A csúcs feldolgozása után (a változások vastagítva):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty \\ 2 & \mathbf{3} & 0 & -2 \\ 3 & 3 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

B csúcs feldolgozása után (a változások vastagítva):

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{3} & \infty \\ \infty & 0 & 2 & \infty \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & \mathbf{5} & 0 \end{pmatrix}$$

C csúcs feldolgozása után (a változások vastagítva):

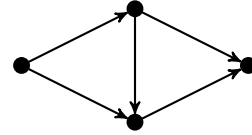
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & 0 & 2 & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

D csúcs feldolgozása után (a változások vastagítva):

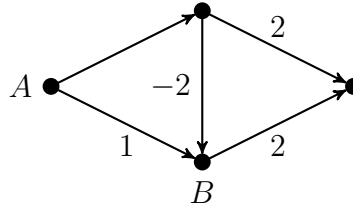
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ \mathbf{3} & 0 & 2 & 0 \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

5.

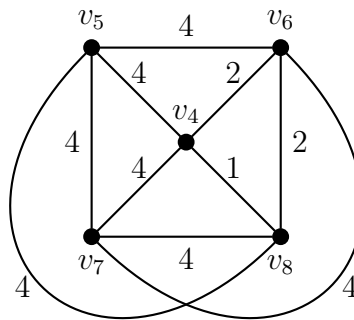
[ZH 2008. október 10.] Határozzuk meg ebben a gráfban az élsúlyokat úgy, hogy a Dijkstra algoritmus rossz eredményt adjon!



Attól, hogy rakunk bele negatív élsúlyt, még akár működhetne! Úgy kell negatív élsúlyt belerakni, hogy romoljon el. Az ábrán látható súlyozással az A csúsból kiindulva a B csúcsra az algoritmus 1-et mond, pedig a legrövidebb út oda 0 lenne.



6. [pótZH 2011. december 1.] Legyen G teljes gráf a $\{v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ ponthalmazon és a $v_i v_j$ él hossza legyen $l(v_i v_j) = \frac{4}{(i,j)}$. Határozzuk meg a v_4 csúcs távolságát G többi csúcsától. Megváltoztatható-e a $v_7 v_8$ él hossza úgy, hogy v_4 és v_7 távolsága 3 legyen? (Megjegyzés – DM: (i, j) i és j legnagyobb közös osztóját jelenti.)

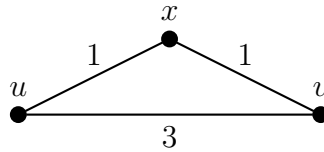


Az ábrán látható a G gráf diagramja, az élekre írt számok az adott él hosszát jelentik. (3 pont)
 A v_4 -től mért távolságokat a v_4 -től indított Dijkstra algoritmus segítségével határozhatjuk meg. Ennek során v_8, v_6, v_5, v_7 sorrendben érjük el a csúcsokat, mindegyik távolságot a v_4 -ból vezető közvetlen él határozza meg, tehát a legrövidebb utak fája a v_4 közepű csillag lesz. (3 pont)
 Ennek alapján a v_5, v_6, v_7 ill. v_8 csúcsok v_4 -től mért távolságai rendre 4, 2, 4, 1 lesznek. (2 pont)
 Mivel $dist(v_4, v_7) = 4 > 3$, és $dist(v_4, v_8) = 1$, ezért ha a $v_4 v_8$ él hosszát 2-re változtatjuk 4-ről, akkor v_4 és v_7 távolsága 3 lesz.

7. [pótpótZH 2010. ősz] Adott egy G gráf, az e él hosszát jelölje $l(e)$. Minden él hosszát növeljük meg 2-vel, azaz legyen $l'(e) = l(e) + 2$ minden élre. Tegyük fel, hogy u és v között P egy legrövidebb út az l' élhosszokkal. Igaz-e, hogy P biztosan egy legrövidebb út u és v között az l élhosszokra nézve is?

A válasz az, hogy általában nem igaz, hogy minden élhosszt egyformán növelve bármely legrövidebb uv út legrövidebb marad az új hosszokkal is. (1 pont)

Ennek igazolására elegendő egy ellenpéldát mutatni, azaz egy olyan élhosszokkal ellátott gráfot és abban egy legrövidebb uv utat, ami nem lesz legrövidebb az élhossznövelések után. (3 pont)
 Az ábrán látható gráf ilyen: eredetileg az uxv út hossza 2, a közvetlen uv él hossza pedig 3, tehát uxv az egyedüli legrövidebb uv út. Az élhosszok növelése után az uxv hossza 6 lesz, míg az uv élé 5, tehát uxv nem marad legrövidebb út. (6 pont)



8. [pótZH 2013. december 6.] Az n pontú egyszerű, összefüggő, pozitív élsúlyokkal rendelkező irányítatlan G gráfban az x és y pontok közötti legrövidebb út hossza s . Az $E' \subset E(G)$ élhalmaz éleit elhagyva a gráf két komponensre esik, x az egyik, y a másik komponensbe kerül. E' minden élén növeljük a súlyt 2-vel. Igaz-e, hogy ekkor az x és y pontok közötti legrövidebb út hossza biztosan $s + 2$ lesz?

Nem igaz. Ellenpélda: legyenek G csúcsai x, z, u és y , élei xz és zy, xu, uz . Az xz és zy élek súlya legyen 1, az xu és uz élek súlya pedig legyen 100. Legyen $E' = \{xz, zy\}$. (Ha valakit nem zavarnak a párhuzamos élek, akkor az xu és uz élek helyett be lehet tenni egy 100 súlyú xz élt is, és az u pont nem is kell.) (6 pont)

Ekkor természetesen a legrövidebb x és y közötti út az xzy , súlya 2. Ha E' éleit elhagyjuk, G két komponensre esik szét, az egyikben van x, u és z , a másikban y . Viszont ha most az xz és zy élek súlyát 3-ra növeljük, akkor a legrövidebb x és y közötti út továbbra is az xzy , de súlya 6. (4 pont)

Megjegyzés: nyilván minden x és y közötti útnak van E' -höz tartozó éle, ezért minden x és y közötti út súlya (hossza) *legalább* 2-vel nő. Vagyis a legrövidebb út hossza legalább $s + 2$.

9. A G irányított gráfról tudjuk, hogy pontosan egy negatív él van benne, és nem tartalmaz negatív összhosszúságú kört. Az s csúcsból szeretnénk legrövidebb utat találni az összes többibe. Hogy tudnánk ezt megtenni a Dijkstra algoritmus (esetleg többszöri) felhasználásával?

Egy legrövidebb út kétféle lehet: vagy használja a negatív élet, vagy nem. Először futtassunk egy Dijkstrát (a szépség kedvéért hagyjuk ki a negatív élet), az i csúcsba vezető legrövidebb út hosszát jelölje d_i^+ . Jelölje u azt a csúcsot, amiből a negatív él indul. Világos, hogy d_u^+ helyes, hiszen a negatív élen nem mehetünk át az u eléréséhez az eredeti gráfban. Belőle is indíthatunk egy Dijkstrát (az eredeti gráfon), hiszen ekkor először a negatív él másik végpontját veszi be a KÉSZ halmazba, ami a definíciónak megfelel. Ezeket a legrövidebb értékeket jelölje d_i^- . A legrövidebb utak tehát $\min(d_i^+, d_u^+ + d_i^-)$ képlettel számolhatók. Így két Dijkstra segítségével kész is vagyunk.