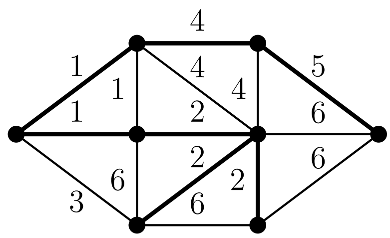
# SzA III. gyakorlat, 2014. szeptember. 26.
## Gráfokat feszítünk, gráfokban járkálunk

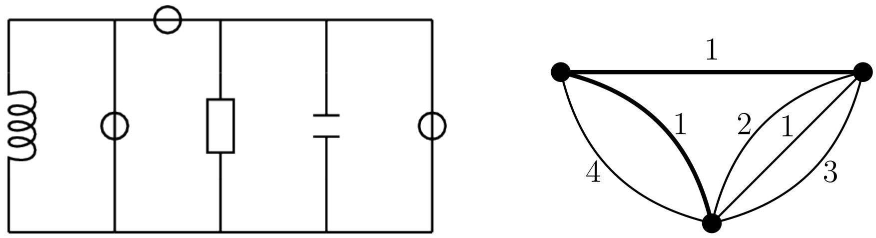
Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Mennyi a következő gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van?**



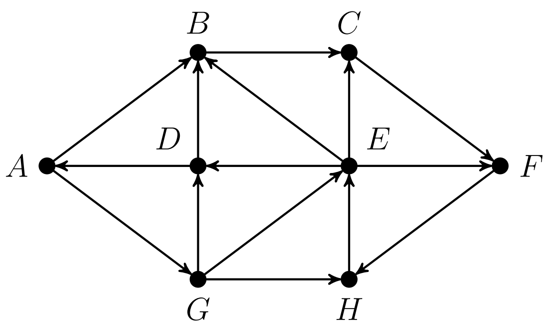

Egy lehetséges megoldás az ábrán jelölve. A 3 darab 1 súlyú élek közül pontosan bármelyik kettőt kell választani, és két 4 súlyú él közül pontosan 1-et kell választani. Más választási lehetőség nincs, ezek viszont függetlenek. Így a lehetőségek száma: $\binom{3}{2}\binom{2}{1}$.

2. **Egyértelműen megoldható-e a következő villamos hálózat? (Segítségképpen a hozzá tartozó gráf is fel van rajzolva.)**

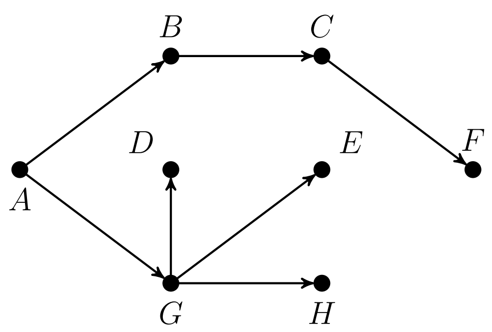



Egy minktg feszfa vastaggal jelölve az ábrán. Ebből látszik, hogy van olyan 1 súlyú él, ami kimaradt, tehát nem.

3. **Készítsük el a következő gráf szélességi bejárását!**




Például így, ha az $A$ csúcsból indulunk:



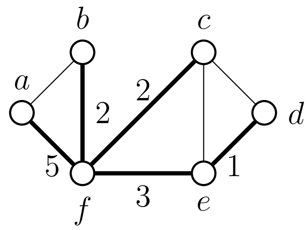
4. **Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Bizonyítsuk be, hogy $G$ minden egyes minimális költségű $F$ feszítőfája outputja lehet a Kruskal algoritmusnak alkalmas (költség szerint monoton növekvő) élsorrend esetén.**
Olyan élsorrenddel futtassuk a Kruskal algoritmust, amelyben az azonos költségű élek közül először az $F$-beliek, aztán az $F$-en kívüliek következnek. A Kruskal algoritmus pontosan $F$-et találja meg.

5. **Adott a $G = (V, E)$ gráf és az élein egy $k : E \to \mathbb{R}^+$ költségfüggvény. Tegyük fel, hogy ismerünk a $G - e$ gráfon egy minimális költségű $F$ feszítőfát. Határozzuk meg a $G$ gráfnak egy olyan minimális költségű feszítőfáját, amelynek $F$-fel a lehető legtöbb közös éle van.**
Az $F + e$-nek egyetlen köre van, mondjuk $C$. Legyen $C$ legdrágább éle $f$. Ha $f$ nem drágább él $e$-nél, akkor a Kruskal algoritmus $F$-et találja meg alkalmas élsorrend esetén, ezért $F$ a válasz. Ha pedig $f$ drágább, mint $e$, akkor $F - f + e$ a válasz, mert alkalmas élsorrendre a Kruskal ezt adja.

6. **Bizonyítsuk be, hogy ha a $G = (V, E)$ gráf minden élének különböző a költsége, akkor $G$ minimális költségű feszítőfája egyértelmű.**
Tfh van két min ktg ffa. Vegyük a legolcsóbb élt, ami az egyik fában benne van, a másikban nincs. Mondjuk $F_1$ tartalmazza $e_1$-et, de $F_2$ nem. $F_2 + e_1$-ben lesz egy $C$ kör és $C$-nek olyan $e_2$ éle, ami nincs $F_1$-ben. Az $e_1$ választása miatt $e_1$ olcsóbb $e_2$-nél. De ekkor $F_2 - e_2 + e_1$ egy $F_2$-nél olcsóbb ffa, ellentmondás.

---

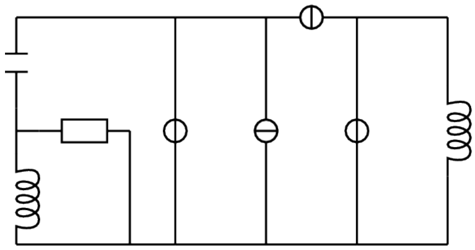
7. **[ZH, 2011. október 13.] Az ábrán látható $G$ gráfnak megjelöltük egy $F$ feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a $G$ gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha $F$ minimális súlyú feszítőfája $G$-nek.**

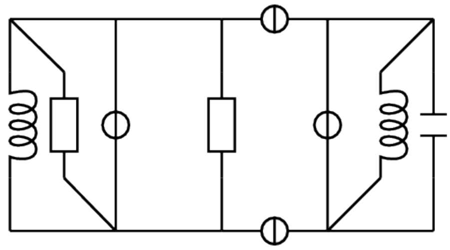


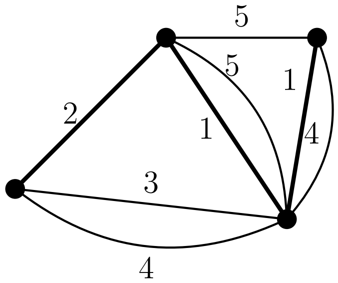

Ahhoz, hogy $F$ minimális súlyú feszítőfa legyen az szükséges, hogy a fába be nem választott élek bármelyikét ha becseréljük a két végpontja között futó fabeli út valamelyik élére, attól a keletkező fa súlya ne csökkenhessen, (3 pont)
azaz bármely fán kívüli él súlya legalább annyi legyen, mint a végpontjai között futó $F$-beli úton lévő élek súlyainak maximuma. (3 pont)
Ez konkrétan azt jelenti, hogy az $ab$ él súlya legalább 5, a $cd$ élé legalább 3, végül a $ce$ él is legalább 3 súlyú. (3 pont)
Ha pedig ezeket a súlyokat adjuk a fenti éleknek, akkor az órán tanult Kruskal algoritmus meg tudja találni az $F$ fát. (1 pont)
Az tehát a válasz, hogy a maradék élek összsúlya legalább $5 + 3 + 3 = 11$. (1 pont)

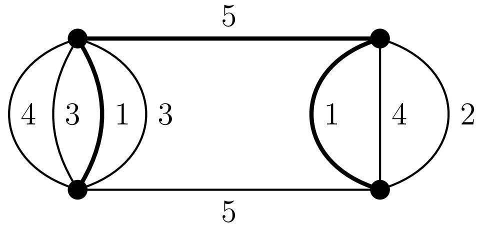
8. **Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az $(x_i, x_j)$ élek költsége (súlya) 1, az $(y_i, y_j)$ éleké 2, az $(x_i, y_j)$ éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?**
A Kruskal algoritmus először az 1 súlyú élek közül fog választani, belőlük tud építeni egy $k-1$ elű fát. Utána a 2 súlyúak következnek, belőlük $l-1$-et lehet választani. A végén az $x_i$ és $y_j$ pontokon lesz két feszítőfa, ezeket muszáj egy 3 súlyú éllel összekötni. Tehát $(k-1)\cdot 1+(l-1)\cdot 2+3 = k+2l$.

9. **Egyértelműen megoldhatók-e a következő villamos hálózatok**?








Felrajzolva a hozzájuk tartozó gráfot minimális feszítőfakeresés után megállapítjuk, hogy a bal oldaliban találtunk egy normál fát (minden 1-es él szerepel benne, és nem szerepel benne 5-ös), míg a jobb oldaliban nem (a feszítőfában szerepel 5-ös). A minktg feszfa vastagítva van.

10. **[ZH 2010. október 15.] Legyenek az $F$ fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \leq i \leq 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \leq j \leq 10$. Tegyük fel, hogy $F$ a $G$ egyszerű gráf $v_1$-ből indított szélességi bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet $G$-nek?**
Tanultuk, hogy az $F$ fában minden $v_1$-ből vezető út a $G$ gráfnak egy legrövidebb útja az adott csúcsba. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a $v_1, v_2, \ldots, v_5$ pontokból nem indulhat további éle $G$-nek, hiszen ekkor valamelyik csúcsba vezetne $v_1$-ből rövidebb út, mint a fabeli. (3 pont)
A $G$ gráfnak tehát csak a $v_6, v_7, \ldots, v_{10}$ csúcsok között vezethet további éle. (1 pont)
Ezen csúcsok közé bárhogy is húzunk be további éleket, az $F$ fa az így kapott $G$ gráf szélességi bejáráshoz tartozó fája marad. (2 pont)
Mivel 5 csúcs közé $\binom{5}{2} = 10$ él húzható, a $G$ gráfnak legfeljebb $10 + 9 = 19$ éle lehet, ahol a 9 az $F$ élszáma. (2 pont)

11. **A kormány tendert ír ki $n$ településnek a helyi vízműre történő rácsatlakoztatására. Minden ajánlat két település (vagy egy település és a vízmű) között kiépítendő vezeték költségét tartalmazza. Tudjuk, hogy a kormány úgy választja ki a megépítendő vezetékeket és az azokat építő egyes vállalkozásokat, hogy a lehető legolcsóbban csatlakozzon az $n$ település a vízműhöz. Cégünk különféle homályos üzletek nyélbeütésével igen olcsón meg tudná építeni a Rátótot és Piripócsot összekötő vezetéket, ráadásul minisztériumi kapcsolatunk, Mutyi bácsi elárulta nekünk az összes beérkezett ajánlatot. Hogyan árazzuk a saját Rátót-Piripócs ajánlatunkat, hogy a lehető legnagyobbat szakítsuk?**
A feladat szövege alapján a nyertesek kiválasztása úgy történik, hogy a települések és a vízmű lesznek egy gráf csúcsai, az élek pedig az egyes ajánlatok, az árral súlyozva. Ebben a gráfban lesz egy minktg feszfa kiválasztva.

Határozzuk meg tehát ezt a feszfát, és a mi két csúcspontunk közötti úton határozzuk meg a legkisebb súlyú élet. Ennél az árnál adjunk 1 Ft-tal kisebb ajánlatot. A választás garantálja, hogy a mi élünkkel bővített gráfban a minktg feszfa tartalmazni fogja a mi élünket. Ennél nagyobbat viszont nem adhatunk, hiszen akkor lenne olyan minktg feszfa is, ami nem tartalmazza a mi élünket.

12. **Adjunk hatékony algoritmust, aminek a bemenete egy $n$ csúcsú összefüggő irányítatlan gráf, a kimenet pedig egy olyan gráfcsúcs, amiből minden más csúcs lefeljebb $n/2$ élű úton elérhető.**

    Elvégzünk egy szélességi bejárást, azaz keresünk egy BFS fát. Ha a szintjeinek száma legfeljebb $n/2$, akkor a gyökér jó, kész vagyunk.

    Ha van $n/2$-nél távolabbi levél, akkor induljunk visszafele a legtávolabbi levéltől, pontosan $n/2$ távolságra. Az itteni csúcs pont jó lesz, hiszen az előbbi levélig teljesül a feltétel, a gráf maradék csúcsainak száma pedig legfeljebb $n/2$, vagyis nem vezethet beléjük $n/2$-nél hosszabb út.

13. **Törpfalván kitört a járvány: ronda kórság fertőzött meg néhány törpöt. Szerencsére a betegségből minden törp egy nap alatt meggyógyul, és ezután egy napig immunissá válik, ám sajnos ezt követően újra fertőződhet. Kellemetlen, hogy a törpök még betegen sem adják fel azt a megrögzött szokásukat, hogy minden egyes nap minden barátjukat meglátogatják. Márpedig ha beteg és nem immunis törp találkozik, az utóbbi bizonyosan megfertőződik. Mutassuk meg, hogy ha Törpfalván 100 törp él, akkor a járványnak a kitörését követő 101-dik napon már bizonyosan vége van.**

    Rajzoljuk fel az ismeretségi gráfot, és az egyszerűség kedvéért húzzuk össze a betegeket egy csúcsba, az ismerőseikhez vezető élek értelemszerű kezelésével. Vegyük észre, hogy a járvány pontosan úgy terjed, mintha ebből a beteg pontból indítanánk szélességi bejárást, vagyis az $i$ napon pont az $i-1$ távolságra lévő törpök lesznek betegek (ezt szép formálisan indukcióval is lehet bizonyítani). Ez viszont azt jelenti, hogy senki nem betegszik meg egynél többször, valamint legfeljebb a BFS fa szintszáma lehet a betegség leghosszabb ideje, ami pontosan 100. Tehát a 101-dik napon már senki sem beteg.