

1. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?

A $\binom{n}{2}$ lehetséges él mindegyikéről függetlenül döntünk, hogy be legyen-e húzva, így $2^{\binom{n}{2}}$.

2. Mutassuk meg, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros, de ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.

Véges esetben: tfh nem igaz, vagyis a páratlan fokszámú pontok száma páratlan. Ekkor írjuk fel a fokszámok összegét:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2e,$$

ahol a jobb oldalon egy páros szám áll. A bal oldal paritásában nem számítanak a páros fokszámok, így páratlan darab páratlan fokszám összege is páratlan, tehát a bal oldal páratlan, ami lehetetlen, tehát páros darab páratlan fokszámú pontnak kell lennie.

Végtelen gráfban: ellenpélda egy egy irányban végtelen út – az első csúcs foka 1, az összes többié 2.

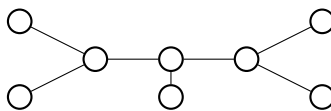
3. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélek. Mi lehet ez a két szám?

Az egyik fokszám nyilván 1, és $x \geq 2$ van belőle. A másik legyen d , és $8 - x$ van belőle. Felírva a fokszámok és élszámok közötti összefüggést, tudván, hogy 7 élünk van:

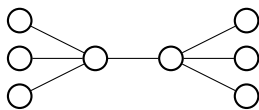
$$x \cdot 1 + (8 - x)d = 2 \cdot 7,$$

ahonnan $d = 1 + \frac{6}{8-x}$. Így az egészség követelménye és a feltételek alapján a következő megoldások lehetségesek:

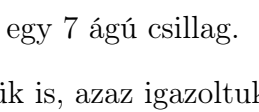
- $(x = 2, d = 2)$, és ilyen fa létezik is: egy 8 hosszú út.



- $(x = 5, d = 3)$, és ilyen fa létezik is:



- $(x = 6, d = 4)$, és ilyen fa létezik is:



- $(x = 7, d = 7)$, és ilyen fa létezik is: egy 7 ágú csillag.

Fontos, hogy az eredményeket ellenőriztük is, azaz igazoltuk, hogy tényleg létezik a megfelelő fa.

4. Hány éle van az n pontú egyszerű öf. gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?

A gráfban biztosan van kör, különben nem lehetne több feszítőfa. Egy k hosszú körből tetszőleges él kihagyásával különböző feszítőfákat csinálhatunk, így esetünkben legfeljebb egy darab, három hosszú kör lehet. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha egy élet elhagyva már fát kapunk, tehát $n - 1 + 1 = n$ csúcsú a gráf.

5. Igaz-e, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör?

Számozzuk meg a csúcsokat az $1 \dots n$ számokkal, és az élek mindig a kisebb sorszám felől a nagyobb felé legyenek irányítva. Tfh van kör, ami áthalad az i csúcson: ekkor sorban a kör csúcsai: $i < j < \dots < k < i$, ami ellentmondás, tehát a gráfban nincs irányított kör.

6. **Igaz-e, hogy tetszőleges G egyszerű gráf esetén vagy G , vagy a komplementere összefüggő?**

Igaz, mert egyszerűen ha G összefüggő, akkor kész vagyunk, ha pedig G nem összefüggő, akkor a komplementere az lesz (bizonyítás a 19. feladatban).

7. **Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!**

A C_5 pl. önkomplementer (hf: ellenőrizni). A K_6 -nak összesen 15 éle van, az önkomplementernek pedig fele ennyi kellene legyen, vagyis 6 pontút ilyen gráf nem létezhet.

8. **Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!**

Tfh nem összefüggő. Ekkor nyilván legalább két komponense van. Vegyük a legkisebb (k) csúcsszámú komponensét, aminek legfeljebb $n/2$ csúcsa van (skatulya elv)! Mivel a gráf egyszerű, ezért ebben a komponensben a legnagyobb fokszám legfeljebb $k - 1$ lehet, viszont $k - 1 \leq n/2 - 1$. Ennek a komponensnek a fokszámai tehát a feltétellel együtt a következőt kell, hogy teljesítsék: $n/2 \leq d_i \leq n/2 - 1$, ami lehetetlen.

9. **[pótZH, 2008. december 5.] A K_6 gráf minden éléhez kiválasztunk 3 különböző számot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tesszük ezt, lesz két különböző él, amikhez ugyanazt a három számot választottuk.**

A K_6 teljes gráfnak $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ éle van. (3 pont)

Az élekhez választott lehetséges számhármakok száma $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$. (3 pont)

Mivel $15 > 10$, ezért a skatulya-elv szerint lesz két olyan él, amihez ugyanazt a számhármak tartozik. (4 pont)

10. **Van-e olyan egyszerű gráf, aminek a fokszámai**

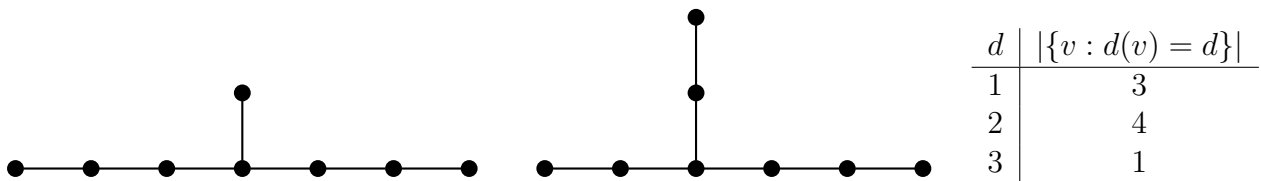
(a) 1, 2, 2, 3, 3, 3?

Lehet, hf rajzolni egy ilyen.

(b) 1, 1, 2, 2, 3, 4, 4?

Nem, mert p₁ p₂ p₃ p₄ fokunk nem lehet.

11. **Mutassunk két olyan fát, amelyeknek a fokszámai megegyeznek, viszont a két fa mégsem izomorf!**



12. **Határozzuk meg az összes olyan véges, egyszerű G gráfot, aminek nincs két azonos fokú csúcsa.**

Az egy csúcsú gráf jó. Tfh van ilyen $n \geq 2$ csúcsú egyszerű gráf. A fokszámok 0 és $n - 1$ között lehetnek, vagyis pont n féle. Tehát van 0 és $n - 1$ fokú csúcs is, az előbbi egy csúccsal sem, az utóbbi pedig az összessel össze van kötve, ami ellentmondás. Így csak az egy csúcsú gráf jó.

13. **Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!**

Tudjuk, hogy egy n csúcsú fának $n - 1$ éle van, továbbá egy e élű gráf komplementerének $\binom{n}{2} - e$ éle van, két izomorf gráf éleinek száma pedig megegyezik. Így $n - 1 = \binom{n}{2} - (n - 1)$, ahonnan $n = 1$ vagy $n = 4$, tehát csak 1 és 4 csúcsú fák jöhetnek szóba. Az egy csúcsú egyértelmű, és

megnézve jó is. 4 csúcsú esetén az elsőfokú pontok száma lehet 2, így a 4 hosszú utat kapjuk, ami pont jó is. Ha az elsőfokú pontok száma 3 lenne, akkor a gráfot („csillag”) felrajzolva látjuk, hogy nem jó. Más 4 csúcsú fa pedig nem lehet.

14. **Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n - 3$!**

Tfh a másodfokú pontok száma $n - 3$. Ekkor mivel van legalább két elsőfokú pont, már csak egy pont fokszáma kérdéses. Tudjuk, hogy $n - 1$ él van, így a fokszámok összege $1 + 1 + (n - 3) \cdot 2 + d = 2e = 2 \cdot (n - 1)$, ahonnan $d = 2$ adódna, viszont ez ellentmond a feltételnek, hiszen $n - 2$ másodfokú pont lenne.

15. **Mutassuk meg, hogy ha egy G gráfnak 11 csúcsa és 45 éle van, akkor G -nek van olyan csúcsa, ami legalább 9-edfokú.**

A G csúcsainak fokszámösszege $2 \cdot 45 = 90$, márpedig ha minden csúcs foka legfeljebb 8 lenne, akkor a fokszámösszeg legfeljebb $8 \cdot 11 = 88$ lehetne.

16. **Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?**

Vegyük észre, hogy K_{60} -nak pont 1770 éle lenne! Ebből a mi gráfunknak 2 éle hiányzik. Tehát a kérdés: K_{60} -ból hogy hagyhatunk el két élet? Egyik lehetőség, hogy egy csúcs két élet hagyjuk el, másik pedig az, ha a két élet két különböző csúcstól hagyjuk el. Más lehetőségünk nincs, különben izomorf gráfokat kapnánk. Tehát 2.

17. **Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?**

Ha n a T pontjainak száma, akkor $\frac{1}{2}n(n - 1) = \binom{n}{2} = |E(\overline{T})| + |E(T)| = 15 \cdot |E(T)| + |E(T)| = 16 \cdot |E(T)| = 16(n - 1)$, mert $|E(T)| = n - 1$. Innen $n = 32$, vagy $n = 1$.

18. **A G egyszerű gráfnak e olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G -nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.**

A feladat szerint G -ben van pontosan egy kör, és e ennek egy éle. Mivel egyszerű gráfban minden kör legalább 3 hosszú, és G -ben a kör bármely élet elhagyva feszítőfát kapunk, a feladat állítása adódik.

19. **Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!**

Tfh nem összefüggő. Ekkor léteznek olyan x és y csúcsok melyek különböző komponensben vannak, és a komplementerben közöttük nyilván vezet él. Vegyünk most egy tetszőleges harmadik z csúcst: ha x és y közül egyikkel az eredeti gráfban nincs összekötve, akkor a komplementerben mindenképp egy komponensben lesz x -szel és y -nal is. Mindkettővel nem lehetett összekötve, mert akkor x és y nem lett volna különböző komponensben. Ezek alapján a komplementer összefüggő (tetszőleges két csúcs között vezet út), viszont egy összefüggő gráf nem lehet izomorf egy nem összefüggővel, így az eredeti gráfnak összefüggőnek kellett lennie.

20. **A G egyszerű gráfnak e olyan éle, aminek elhagyásával fát kapunk. Mutassuk meg, hogy G -nek még legalább két másik éle is rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.**

Ez a feladat véletlenül kétszer szerepel kétszer szerepel.

21. **A G egyszerű gráfnak $2k$ pontja van, minden pontjának foka legalább $k - 1$, és G -nek létezik egy legalább k -adfokú pontja. Bizonyítsuk be, hogy G összefüggő!**

A fokszámok miatt ekkor bármely komponense legalább k pontú. Ha tehát G szétesik, az csak úgy fordulhat elő, hogy két, egyenként k pontú komponense van. Mivel van k fokú pont, van legalább $k + 1$ pontú komponens is, ezért G nem tartalmazhat egynél több komponenst.

22. **[pótZH, 2012. november 29.] Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3 élű részgráfja van G -nek, ami út?**

A G gráf minden 3 élű sétája út, mivel G egyszeű és nincs benne háromszöget. (1 pont)

Ezért elegendő megszámolni, hogy hány 3 élű séta van G -ben: a kérdzett utak száma ennek pontosan a fele lesz, hiszen minden útból pontosan két sétát lehet alkotni. (2 pont)

A séta első csúcsa 100 féle lehet, hisz bármely csúcs szóba jön. A második csúcs a 4-regularitás miatt 4 féle lehet, (2 pont)

míg a harmadik csúcs, az iménti három maradék szomszédjának valamelyike, így ez 3-féleképp választható, hasonlóan a negyedikhez. (3 pont)

A 3 élű séták száma tehát pontosan $100 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 3600$ -nak adódik, így kérdzett részgráfok száma kerekén $\frac{3600}{2} = 1800$. (2 pont)

23. **Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2 -nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.**

Az e_2 -nek a T_2 azon útján kell lenni, ami az e_1 két végpontját összeköti. Ráadásul olyan él kell, ami a $T_1 - e_1$ két komponense között halad. Az adott út az egyik komponensből indul, a másikban ér véget, szóval biztos lesz ilyen él, és az jó is.

24. **[pótpótZH 2010. ősz] Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)| - |E(G)|$ komponense van.**

Tegyük fel, hogy a G gráfnak k komponense van, rendre n_1, n_2, \dots, n_k csúccsal. (2 pont)

Mindegyik komponens tartalmaz egy-egy feszítőfát, (2 pont)

és minden feszítőfának eggyel kevesebb éle van, mint az adott komponens mérete. (2 pont)

Ezek szerint G éleinek számára azt kapjuk, hogy $|E(G)| \geq n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_k - 1 = n_1 + n_2 + \dots + n_k - k = |V(G)| - k$. (3 pont)

Innen a feladat állítása közvetlenül adódik. (1 pont)

Persze másképp is érvelhetünk.

Ha G -nek egy élet elhagyjuk, attól legfeljebb eggyel nő a gráf komponenseinek száma. (3 pont)

Ha G minden élet elhagyjuk, akkor a komponensek száma az eredeti k -ról $|V(G)|$ -re növekszik, hiszen minden pont izolált lesz. (3 pont)

Ezek szerint $k + |E(G)| \geq |V(G)|$, (3 pont)

és ebből átrendezéssel a feladat állítását kapjuk: $k \geq |V(G)| - |E(G)|$. (1 pont)