SzA XII. gyakorlat, 2014. november 28.

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

$3 + 2 = 1$

---

1. Bizonyítsuk be, hogy $39^{14} - 1$ osztható 5-tel!
2. Ha 10839-et és 11863-at elosztjuk ugyanazzal a háromjegyű számmal, akkor ugyanazt a maradékot kapjuk. Mi ez a maradék?
3. Mi a 403^{402} utolsó három, a $29^{39^{49}}$ utolsó két és a $7^{6^{5^{4^{3^2}}}}$ szám utolsó jegye tízes számrendszerben?
4. Gyorshatványozással számítsuk ki $7^{19} \pmod 5$ értékét!

---

5. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges p prímszámra: $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$
6. Bizonyítsuk be, hogy minden n természetes számra $n^{11} + 10n$ osztható 11-gyel!
7. Gyorshatványozással számítsuk ki $7^{73} \pmod{19}$ értékét!
8. Határozzuk meg x-et!
   (a) $49^{49} \equiv x \pmod{15}$
   (b) $42^{600} \equiv x \pmod{13}$
   (c) $x^{11999} \equiv 5 \pmod{13}$
9. Milyen maradékot ad a 31-gyel osztva, ha $a^{100} \equiv 5 \pmod{31}$ és $a^{101} \equiv 19 \pmod{31}$?
10. Milyen maradékot ad 59^{99} 101-gyel osztva?
11. Mi az utolsó három jegye a $999^{777^{8888}}$ számnak?
12. Mi az utolsó két jegye az $1997^{2001^{2005}}$ számnak?
13. Legyenek m és n pozitív egészek, továbbá $m \mid n$. Bizonyítsuk be, hogy $\varphi(m) \mid \varphi(n)$.
14. Mely n számokra lesz $\varphi(n)$ prímszám? Mikor lesz $\varphi(n)$ páratlan?

Hasznos tudnivalók

- $\varphi(m)$: 1 és m közötti m-hez relatív prímek száma; $\varphi(p) = p - 1$, ha p prím
- $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$, ha p prím
- $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, ha $(a, b) = 1$
- $\varphi(n) = \prod(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}) = \prod(p_i - 1)p_i^{\alpha_i - 1} = n \prod(1 - \frac{1}{p_i})$
- Ha $(a, m) = 1$, akkor $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$
- Ha p prím, akkor $a \equiv a^p \pmod p$