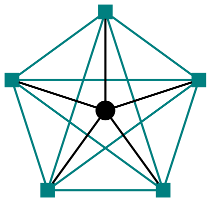
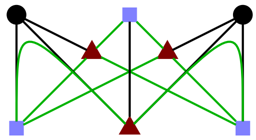
SzA X. gyakorlat, 2014. november. 14.

Gráfokat rajzolunk, számokat osztunk, megint ZH...

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?**

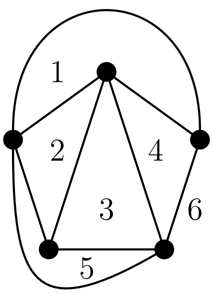



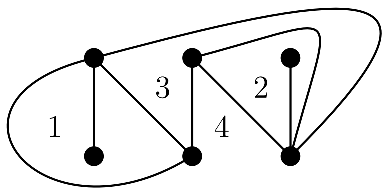
Nem, a bal oldalon egy K_5 bújik meg, a jobb oldalon pedig egy $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf gráf, az ábra szerint.

2. **Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?**
Az Euler-formula ($n + t = e + 2$) és az ismert $\sum d_i = 2e$ képlet alapján $n = 8$.

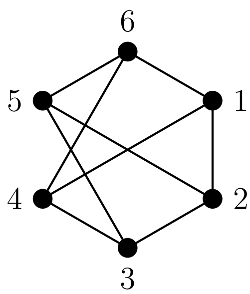
3. **Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka ≥ 6.**
Síkbarajzolható egyszerű gráfok esetén $e \leq 3n - 6$, és ebben az esetben $n\delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2e$, de tudjuk, hogy $\delta(G) = 6$, tehát $e \geq 3n$, ami ellentmondás.
Rossz gondolat, ha esetleg K_6 létét szeretnénk bizonyítani... Elég ezoterikus, de ami ennél is rosszabb: helytelen bizonyítás jönne ki belőle. Gondoljunk csak a $K_{6,6}$-ra.

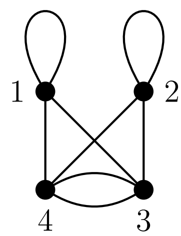
4. **Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!**





Az ábrán látható. Szorgalmasabbak eleve síkba is rajzolhatják őket.





5. **Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^*-nak?**
A duális pontjainak száma pont G tartományainak számával lesz egyenlő. Az Euler-formula, ami $n + t = e + 2$, a feltételek alapján használható, továbbá a regularitás és a fokszámösszegek képlete alapján $3n = 2e$. Innen kiszámolhatjuk, hogy $e = 30$ és $t = 12 = n^*$, ami a megoldás.

6. **Határozzuk meg az Euklidészi algoritmussal $lnko(504, 372)$-t! Határozzuk meg $lkkt(504, 372)$-t! Hány osztója van 504-nek?**

$$\begin{aligned}
504 &= 1 \cdot 372 + 132 \\
372 &= 2 \cdot 132 + 108 \\
132 &= 1 \cdot 108 + 24 \\
108 &= 4 \cdot 24 + \mathbf{12} \\
24 &= 2 \cdot 12 + 0,
\end{aligned}$$

tehát $lnko(504, 372) = 12$.
$lnko(x, y) \cdot lkkt(x, y) = x \cdot y$, ezért $lkkt(504, 372) = 504 \cdot 372/12 = 15624$. Másképp is lehet, a prímfelbontások alapján $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, $372 = 2^2 \cdot 3 \cdot 31$, ezért $lkkt(504, 372) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31 = 15624$.
$504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$, ezért $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$ osztója van.

7. **[PZH 2008. december 5.] Tudjuk, hogy n és m olyan pozitív egészek, amikre $lnko(n, m) = 10$ és $lkkt(n, m) = 1000$, ahol $lnko(n, m)$ és $lkkt(n, m)$ pedig rendre az n és m legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik. Határozzuk meg az nm szorzatot.**
Tétel: $lnko(n, m)lkkt(n, m) = nm$. Ebből $nm = 10 \cdot 1000 = 10000$.

8. **a és b páratlan számok, $c = a^2 + b^2$. Mennyi c és 4 legnagyobb közös osztója?**
Legyen $a = 2k + 1$ és $b = 2l + 1$, ekkor $c = (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 = 4(k^2 + l^2 + k + l) + 2$. Ekkor az Euklidészi algoritmussal

$$\begin{aligned}
c &= (k^2 + l^2 + k + l) \cdot 4 + \mathbf{2} \\
4 &= 2 \cdot 2 + 0,
\end{aligned}$$

vagyis 2.

Persze az is jó (bár kevésbé elegáns) megoldás, hogy két ptlan szám összege ps lesz, így a 2-vel oszthatóság biztos, és mutatunk egy ellenpéldát, miszerint c nem osztható 4-gyel.

9. **Melyek azok a p prímszámok, amelyekre**

   (a) **$p + 10$ és $p + 14$ is prím?**
   A 3 jó. Nézzük meg a többit! 10 3-mal osztva 1 maradékot, míg 14 pedig 2 maradékot ad. A $p \neq 3$ prímszám biztos nem osztható 3-mal, így 1 vagy 2 maradékot ad vele osztva. Első esetben $p + 14$, míg a másodikban $p + 10$ lesz osztható 3-mal, vagyis összetett. Tehát az egyetlen megoldás 3.

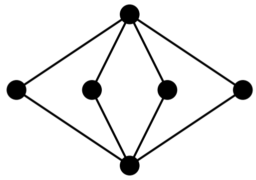
   (b) **$p^2 + 2$ prím?**
   A 3 ismét jó. Nézzük meg a többit! A $p \neq 3$ prímszám biztos nem osztható 3-mal, így 1 vagy 2 maradékot ad vele osztva. p^2 3-mal vett maradéka mindkét esetben 1, viszont ehhez 2-t adva az eredmény osztható lesz 3-mal, vagyis összetett. Tehát az egyetlen megoldás ismét 3.

   (c) **$p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?**
   Pontosan ugyanúgy járunk el, mint az előző esetben, csak itt $p = 5$ lesz a jó. $p \neq 5$ esetén az $1 \ldots 4$ 5-tel vett maradékok négyzete mindig 1 vagy 4 lesz, előbbi esetben $p^2 + 4$, utóbbiban $p^2 + 6$ lenne 5-tel osztható.

---

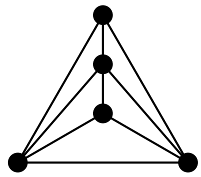
10. **Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e$ gráfok?**
K_6: nem, hiszen tartalmazza részgráfként K_5-öt.

$K_{4,2}$: igen

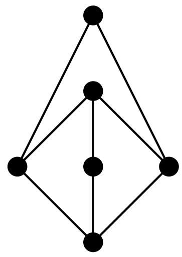


$K_{4,2}$: nem, hiszen tartalmazza részgráfként $K_{3,3}$-at.

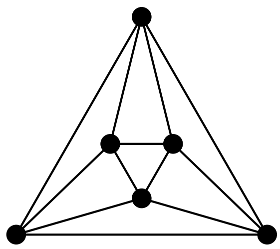
$K_5 - e$: igen



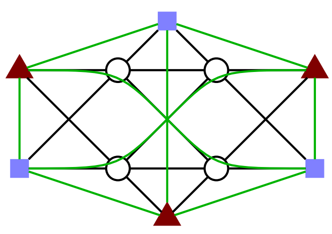
$K_{3,3} - e$: igen



11. **[ZH 2009. november 23.] A G gráfot úgy kaptuk, hogy a 6 pontú teljes gráfból elhagytunk három független (vagyis pontdiszjunkt) élt. Síkbarajzolható-e ez a G gráf?** *(Ha igen, rajzoljuk le keresztezés nélkül, csupa egyenes szakasszal, ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!)*
Magyarul: egy K_6-ból elhagytunk egy teljes párosítást. Mindenféle szimmetriaokokból ezt csak egyféleképpen tehetjük meg. A keletkezett gráfban $e = 15 - 3 = 12$. Síkbarajzolható (ezt megtippeltük), akinek segít, t-t is kiszámolhatja az Euler-formulával. Egy megoldás pl:



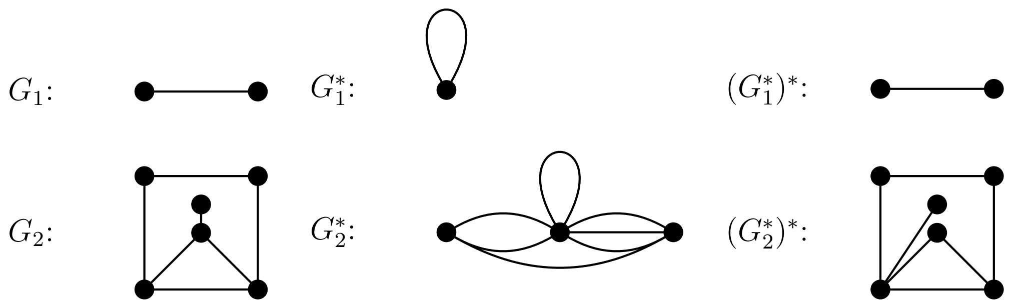
12. **[pZH 2011. december 1.] Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?**



A megjelölt csúcsok és élek által alkotott élek $K_{3,3}$ egy soros bővítését mutatják. (8 pont)
Tanultuk, hogy $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, így annak soros bővítése sem az, tehát a feladatban szereplő gráf sem síkbarajzolható. (2 pont)

13. **Rajzoltam egy n csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzoljuk le a duálisát!**
Egy pont, $n-1$ hurokéllel. Ez azért van így, mert a fában nincs kör, tehát egy tartománya van, továbbá az $n-1$ él mindegyike ezen egy tartomány között fut.

14. **Adjunk meg egy olyan G_1 és G_2 gráfokat, hogy adott lerajzolás szerint $G_1 \cong (G_1^*)^*$ és $G_2 \ncong (G_2^*)^*$!**
Sokfélét lehet rajzolni mindkettőből, két egyszerű példa:

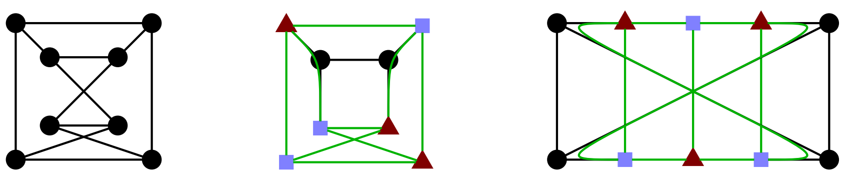


15. **[ZH 2009. november 23.] Egy 12 csúcsú konvex poliédernek 10 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?**
A konvex poliéder élhálója pont egy síkbarajzolható gráfnak felel meg. Ennek a gráfnak a duálisában a pontok fokszáma viszont pont a nekik megfelelő lapok oldalszámával egyezik meg. Azaz: $n = 12$, $t = n^* = 10$, $e^* = e = n + t - 2 = 20$, $\sum d^* = 2e^*$, $\sum d^* = n^* d^*$, fentieket rendezve, kiszámolva a $d^* = 4$, vagyis a keresett szám 4.

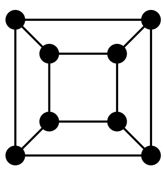
16. **Van-e olyan a és b szám, hogy $lnko(a,b) = 3$ és $a + b = 100$? És ha $lnko(a,b) = 5$?**
Az első esetben 3 osztója mindkét számnak, azaz $a = 3k$ és $b = 3l$, ekkor $a + b = 3(k + l) = 100$, 100 viszont nem osztható hárommal, tehát nincs. A második esetben igen, pl. 55 és 45.

17. **[ZH 2008. november 17.] Igazoljuk, hogy ha m és n pozitív egészek, akkor $d(n)d(m) = d(lnko(n,m))d(lkkt(n,m))$ teljesül, ahol $d(k)$ a k pozitív osztóinak számát, $lnko(n,m)$ és $lkkt(n,m)$ pedig rendre az n és m legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik.**
Fel fogjuk használni, hogy $\min(a,b)\max(a,b) = ab$, valamint $\min(a,b) + \max(a,b) = a + b$. n és m kanonikus alakjával fogunk dolgozni, $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ és $m = \prod_{i=1}^k p_i^{\beta_i}$.
Bal oldal: $d(n)d(m) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1)(\beta_i + 1) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i\beta_i + \alpha_i + \beta_i + 1)$
Jobb oldal: $d(lnko(n,m))d(lkkt(n,m)) = \prod_{i=1}^k (\min(\alpha_i,\beta_i) + 1)(\max(\alpha_i,\beta_i) + 1) = \prod_{i=1}^k (\min(\alpha_i,\beta_i)\max(\alpha_i,\beta_i) + \min(\alpha_i,\beta_i) + \max(\alpha_i,\beta_i) + 1) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i\beta_i + \alpha_i + \beta_i + 1)$.
Azaz ekvivalens átalakításokkal ugyanarra jutottunk, tehát az állítás igaz.

18. **Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?**

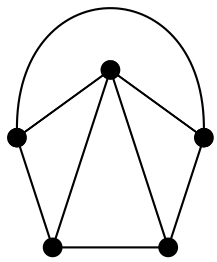


A bal oldali igen, lásd alább egy konkrét síkbarajzolását. A jobb oldaliak nem, lásd mindkettőben a $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf részgráfot.



19. **Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos! (Feltételezhetjük, hogy a világ nem tórusz alakú, valamint nincsenek exklávék.)**
Feleltessünk meg egy gráfban minden országnak egy csúcsot, és akkor legyen összekötve két csúcs, ha a két ország szomszédos egymással. Ennek a gráfnak síkbarajzolhatónak kell lennie. Ha viszont mindenki szomszédos lenne mindenkivel, akkor a gráf nem lenne síkbarajzolható, mert K_5 lenne.

20. **Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!**



21. **[ZH 2008. november 17] Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G \cong G^*$ teljesül, továbbá $e = n + 2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig G csúcsainak számát jelöli.**
Az izomorfia miatt $n^* = n$, a duális definíciója miatt pedig $n^* = t$, tehát az Euler-formula, az előzőek, és a feltétel alapján $n + t = e + 2 = n + n = n + 2 + 2$, ahonnan $n = 4$ és $e = 6$. Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért nem lehetnek többszörös- és hurokélek, a K_4-nek pedig pont 6 éle van, így ha létezik ilyen gráf, akkor az csak a K_4 lehet. K_4-et síkbarajzolva és elkészítve a duálisát láthatjuk, hogy jé, tényleg izomorfak.

22. **Létezik-e olyan háromjegyű szám, amely osztóinak száma osztható 11-gyel?**
Mivel 11 prímszám, ennek a keresett számnak a prímfelbontása így néz ki: $p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_i^{\alpha_i} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$, ahol $\alpha_i + 1 = 11x$. Ha csak a legkisebb prímszámot, 2-t, és a legkisebb x-et, 1-et engedjük meg a prímfelbontásban, akkor is már $2^{10} = 1024$ lenne az első ilyen szám, tehát háromjegyűvel biztos nem megoldható.

23. **Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész egyértelműen írható $n = k^2 \cdot l$ alakban, ahol k és l pozitív egészek, továbbá l egyetlen négyzetszám osztója az 1.**
l legyen az n kanonikus alakjában a ptlan kitevőjűek szorzata, k pedig a páros kitevőjűeké (ami értelemszerűen négyzetszám). A kanonikus alak egyértelműsége miatt ez a felbontás egyértelmű.

24. **Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen n-re nem egyszerűsíthető!**
Keressük meg *lnko*-t! Euklidészi algoritmussal:

$$\begin{aligned} 21n + 4 &= 1 \cdot (14n + 3) + (7n + 1) \\ 14n + 3 &= 2 \cdot (7n + 1) + \mathbf{1} \\ 7n + 1 &= 1 \cdot (7n + 1) + 0, \end{aligned}$$

vagyis a számláló és nevező relatív prím.

25. **[PZH 2008. december 5.] Tegyük fel, hogy G olyan síkbarajzolható, egyszerű gráf, amibe nem tudunk további élt húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával. Igazoljuk, hogy ha G^* a G duálisa, akkor G^* 3-reguláris.**
Ha a duálisban van másod- vagy elsőfokú pont, akkor az eredeti gráf nem egyszerű (másodfokú: párhuzamos élek, elsőfokú: hurokél). Ha van 3-nál magasabb d fokú pont, akkor viszont az ehhez

tartozó pont olyan tartománynak felel meg, amit d él határol. Ebbe viszont legalább egy élet be tudunk húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával, ami ellentmond a feltételnek. Tehát csak harmadfokú pontjaink lehetnek, azaz 3-reguláris a gráf.

26. **[PPZH 2010. ősz] Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor G bármely G^* duálisának van olyan tartománya, amit legfeljebb 5 él határol.**
Tanították, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható és csúcsainak száma $n \geq 3$, akkor G-nek legfeljebb $3n-6$ éle lehet. (2 pont)
Ha G-nek legfeljebb 2 csúcsa van, akkor éleinek száma legfeljebb egy, ugyanennyi éle van tehát G^*-nak is, ezért G^* bármely lapjának határa legfeljebb két élből áll. (Hiszen az egyetlen él mindkét oldala határolja ugyanazt a lapot.) (1 pont)
Ha pedig G-nek legalább 3 csúcsa van, akkor a G-beli csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese, tehát legfeljebb $6n-12$. (1 pont)
Ez azt jelenti, hogy G-nek van olyan csúcsa, ami legfeljebb ötödfokú, hiszen ha minden csúcsnak legalább 6 lenne a foka, akkor a fokszámösszeg legalább $6n$ lenne. (2 pont)
Legyen v ilyen, legfeljebb 5-ödfokú csúcs G-ben. A v csúcs a G^* valamelyik tartományának belsejében van. Az ezen tartomány határoló G^*-beli élek éppen a v-ből induló G-beli éleknek felelnek meg, (3 pont)
ezért ezt a tartományt legfeljebb 5 él határolja, mi pedig éppen egy ilyen létezését akartuk igazolni. (2 pont)

Ha vki azt hivatkozza, hogy minden egyszerű sr gráfnak van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azért is jár az 5 pont. Ha a $3n-6$-os felső becslés alapján jutunk erre, akkor vhogy el kell intézni a legfeljebb 2 csúcsú gráfokat.

27. **Igazoljuk, hogy ha G n pontú sr gráf, és G izomorf G^*-gal, akkor G-nek $2n-2$ éle van!**
Mivel G^* öf, ezért G is az az izomorfia miatt. Tehát $n+t=e+2$ az Euler formulából, $n* = t$ a definícióból, végül $n^* = n$ az izomorfiából, ahonnan $2n = e+2$ adódik. (Az $n-1$-szög alapú gúla élhálója pl ilyen.)

28. **Tfh G öf, sr, és G minden lapja háromszög, ill., hogy G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G-nek?**
Az éleket duplán számolva $3t = 2e = 2e^* = 4t^*$. Mivel G öf, ezért $t^* = n$. Szóval $n+t = e+2$, azaz $6e + 8e = 12n + 12t = 12e + 24$, vagyis $e = 12$. Innen $n = 6$ és $t = 8$. (A kocka élhálója pl ilyen.)

29. **Egy 20-csúcsú poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?**
A poliéder élhálója öf síkgráf, 20 csúcsa és 12 lapja van. Az élek száma $6k$, hisz $12k$ a körök összhossza, amiben minden élt kétszer számoltunk. Innen Euler-formulából $k = 5$.

30. **n és m pozitív egész számok. Hány olyan pozitív egész szám van, ami legalább az egyiknek osztója?**
$d(n) + d(m) - d((n,m))$ a szita formula alapján (n osztóinak számát és m osztóinak számát összeadjuk, majd levonjuk azon osztók számát, amik mindkettőnek osztói – azaz pont a legnagyobb közös osztójuk osztóinak számát, hiszen ezeket kétszer számoltuk).

31. **Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 osztója van, akkor n nem lehet egy egész szám ötödik hatványa!**
Ha n egy egész szám ötödik hatványa, akkor a prímtényezős felírásban a kitevők így néznek ki: $5\alpha_1, \ldots, 5\alpha_k$, tehát osztóinak száma $(5\alpha_1+1)\ldots(5\alpha_k+1)$. 2005 prímtényezős felbontása $5 \cdot 401$, viszont az osztók száma nem osztható 5-tel (minden tag $5\alpha_i + 1$ alakú).

32. **[ZH 2011. november 24.] Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G-nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.**
Az órán szerepelt Kuratowski tételt fogjuk felhasználni, ami szerint ha egy G gráf nem síkbarajzolható, akkor tartalmaz $K_{3,3}$-mal vagy K_5-tel topologikusan izomorf részgráfot. (3 pont)
Márpedig ha egy gráf $K_{3,3}$-mal topologikusan izomorf, akkor annak pontosan 6 harmadfokú csúcsa van, így G-nek is legalább hat legalább harmadfokú csúcsának kell lennie, hogy ilyen részgráfja lehessen. (3 pont)
Ha pedig egy gráf K_5-tel topologikusan izomorf, akkor pontosan 5 negyedfokú csúcsa van, ezért ha G ilyen részgráfot tartalmaz, akkor $\Delta(G) \geq 4$ teljesül. (3 pont)
A feladatban szereplő G gráfra mindkét fenti eset elképzelhetetlen, ezért G a Kuratowski tétel miatt bizonyosan síkbarajzolható. (1 pont)

33. **[ppZH 2011. december 14.] Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a $\bar{G}$ komplementergráf nem síkbarajzolható.**
Tanították, hogy egy n csúcsú, egyszerű, sr gráfnak $n > 3$ esetén legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (3 pont)
Jelen esetben ez azt jelenti, hogy G-nek legfeljebb $3 \cdot 11 - 6 = 27$ éle lehet. (3 pont)
Ezért aztán $\bar{G}$ élszáma legalább $\binom{11}{2} - 27 = 55 - 27 = 28$ lesz, (3 pont)
tehát az elsőnek idézett ok miatt $\bar{G}$ nem síkbarajzolható. (1 pont)

34. **Hány csúcsa van egy olyan öf síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van?**
A lapok oldalszámait összeadva minden élt kétszer számolunk le, szóval $2e = 3\cdot3+3\cdot4+1\cdot5 = 26$, azaz $e = 13$. Másrészt $t = 7$ és $n + t = e + 2$ (öf a gráf), azaz $n + 7 = 13 + 2 = 15$, azaz $n = 8$.

35. **Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?**
Ha a ill. b a négyszögek ill. nyolcszögek száma, akkor $t = a+b$, $2e = 3n$ (3-regularitás), $2e = 4a+8b$, valamint $n + t = e + 2$. Innen elemi algebra.

36. **G síkbarajzolható és van Euler-köre. Bizonyítsuk be, hogy G^* páros gráf!**
Ha van benne Euler-kör, akkor minden pont foka páros, valamint G^* páros gráf mivolt ekvivalens azzal, hogy G tartományai kiszínezhetők két színnel úgy, hogy minden él egyik és másik oldalán lévő tartományok különböző színűek. Indukcióval az élszámra:

Ha G üres, akkor triviálisan megthető a színezés (1 színnel). Tfh tehát, hogy bármely e élszámra igaz.

Ha G nem üres, akkor van benne legalább egy kör (ha nem lenne, akkor fa/erdő lenne, ahol lenne ptlan fokú csúcs). Ha elhagyjuk ezt a kört, a fokszámok párosak maradnak, így az indukciós feltétel szerint van megfelelő színezés. A kört (nem körséta! rendes kör) visszarajzolva a belsejében lévő tartományok színét invertálva pont egy jó színezést kapunk.

37. **[ZH 2002.] Legyen $k \geq 2$ és jelölje $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legnagyobb közös osztóját, $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$ pedig az $a_1, a_2, \ldots, a_k$ számok legkisebb közös többszörösét. Mutassuk meg, hogy $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot [a_1, a_2, \ldots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k$ akkor és csak akkor áll fönn minden pozitív egészekbol álló szám k-asra, ha $k = 2$.**
Egyik irány: ha $k = 2$, akkor ez pont a tanult tétel.

Másik irány: tfh $k \neq 2$, és mégis teljesül. Ekkor ellenpélda: $a_i = 2^i$, ekkor lnko 2, míg lkkt 2^k, vagyis behelyettesítve $2 \cdot 2^k = 2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^k$. Ez viszont csak $k = 2$-re teljesülhet, pedig a feltétel szerint $k \neq 2$.

38. **Legyen $F_0 = 0, F_1 = 1$, és $n \geq 2$ esetén az n-dik Fibonacci szám $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazoljuk, hogy F_n és F_{n+1} relatív prímek.**

$(F_{n+1}, F_n) = (F_{n+1} - F_n, F_n) = (F_{n-1}, F_n) = (F_n, F_{n-1}) = \ldots = (F_1, F_0) = (1, 0) = 1$, felhasználva, hogy $(a, d) = (a - d, d)$.