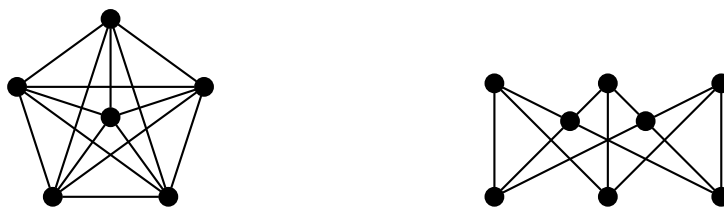
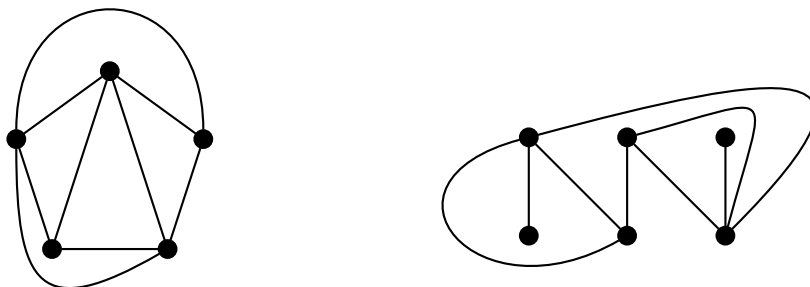


1. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?

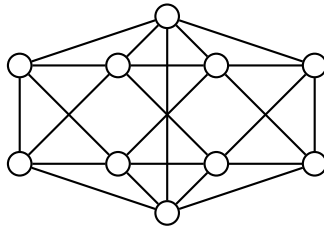


2. Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?
3. Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka ≥ 6 .
4. Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!

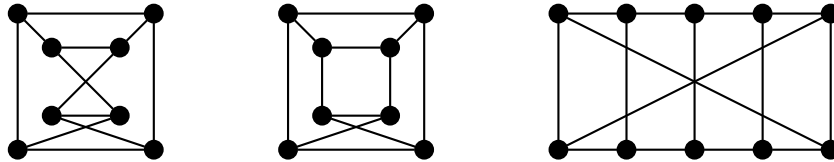


5. Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^* -nak?
6. Határozzuk meg az Euklidészi algoritmussal $lnko(504, 372)$ -t! Határozzuk meg $lkkt(504, 372)$ -t! Hány osztója van 504-nek?
7. [PZH 2008. december 5.] Tudjuk, hogy n és m olyan pozitív egészek, amikre $lnko(n, m) = 10$ és $lkkt(n, m) = 1000$, ahol $lnko(n, m)$ és $lkkt(n, m)$ pedig rendre az n és m legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik. Határozzuk meg az nm szorzatot.
8. a és b páratlan számok, $c = a^2 + b^2$. Mennyi c és 4 legnagyobb közös osztója?
9. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre
- (a) $p + 10$ és $p + 14$ is prím?
 - (b) $p^2 + 2$ prím?
 - (c) $p^2 + 4$ és $p^2 + 6$ is prím?

-
10. Síkbarajzolhatók-e a $K_6, K_{4,2}, K_{4,3}, K_5 - e, K_{3,3} - e$ gráfok?
11. [ZH 2009. november 23.] A G gráfot úgy kaptuk, hogy a 6 pontú teljes gráfból elhagytunk három független (vagyis pontdiszjunkt) élt. Síkbarajzolható-e ez a G gráf? (Ha igen, rajzoljuk le keresztezés nélkül, csupa egyenes szakasszal, ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!)
12. [pZH 2011. december 1.] Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?



13. Rajzoltam egy n csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzoljuk le a duálisát!
14. Adjunk meg egy olyan G_1 és G_2 gráfokat, hogy adott lerajzolás szerint $G_1 \cong (G_1^*)^*$ és $G_2 \not\cong (G_2^*)^*$!
15. **[ZH 2009. november 23.]** Egy 12 csúcsú konvex poliédernek 10 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos?
16. Van-e olyan a és b szám, hogy $lnko(a, b) = 3$ és $a + b = 100$? És ha $lnko(a, b) = 5$?
17. **[ZH 2008. november 17.]** Igazoljuk, hogy ha m és n pozitív egészek, akkor $d(n)d(m) = d(lnko(n, m))d(lkkt(n, m))$ teljesül, ahol $d(k)$ a k pozitív osztóinak számát, $lnko(n, m)$ és $lkkt(n, m)$ pedig rendre az n és m legnagyobb közös osztóját ill. legkisebb közös többszörösét jelölik.
18. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



19. Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos! (Feltételezhetjük, hogy a világ nem tórusz alakú, valamint nincsenek exklávék.)
20. Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!
21. **[ZH 2008. november 17]** Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G \cong G^*$ teljesül, továbbá $e = n + 2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig G csúcsainak számát jelöli.
22. Létezik-e olyan háromjegyű szám, amely osztóinak száma osztható 11-gyel?
23. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész egyértelműen írható $n = k^2 \cdot l$ alakban, ahol k és l pozitív egészek, továbbá l egyetlen négyzetszám osztója az 1.
24. Bizonyítsuk be, hogy a $\frac{21n+4}{14n+3}$ tört semmilyen n -re nem egyszerűsíthető!
25. **[PZH 2008. december 5.]** Tegyük fel, hogy G olyan síkbarajzolható, egyszerű gráf, amibe nem tudunk további élt húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával. Igazoljuk, hogy ha G^* a G duálisa, akkor G^* 3-reguláris.
26. **[PPZH 2010. ősz]** Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor G bármely G^* duálisának van olyan tartománya, amit legfeljebb 5 él határol.
27. Igazoljuk, hogy ha G n pontú sr gráf, és G izomorf G^* -gal, akkor G -nek $2n - 2$ éle van!
28. Tfh G öf, sr, és G minden lapja háromszög, ill., hogy G^* minden lapja négyszög. Hány pontja és hány éle van G -nek?

29. Egy 20-csúcű poliédernek 12 lapja van, mindegyik k oldalú sokszög. Mennyi a k értéke?
30. n és m pozitív egész számok. Hány olyan pozitív egész szám van, ami legalább az egyiknek osztója?
31. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 osztója van, akkor n nem lehet egy egész szám ötödik hatványa!
32. **[ZH 2011. november 24.]** Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G -nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.
33. **[ppZH 2011. december 14.]** Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a \bar{G} komplementergráf nem síkbarajzolható.
34. Hány csúcsa van egy olyan öf síkbarajzolható gráfnak, aminek három háromszöglapja, három négyszöglapja és egy ötszöglapja van?
35. Egy konvex test minden lapja négyszög vagy nyolcszög és minden pontban pontosan három lap találkozik. Mennyi a négyszög- és nyolcszöglapok számának különbsége?
36. G síkbarajzolható és van Euler-köre. Bizonyítsuk be, hogy G^* páros gráf!
37. **[ZH 2002.]** Legyen $k \geq 2$ és jelölje (a_1, a_2, \dots, a_k) az a_1, a_2, \dots, a_k számok legnagyobb közös osztóját, $[a_1, a_2, \dots, a_k]$ pedig az a_1, a_2, \dots, a_k számok legkisebb közös többszörösét. Mutassuk meg, hogy $(a_1, a_2, \dots, a_k) \cdot [a_1, a_2, \dots, a_k] = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_k$ akkor és csak akkor áll fenn minden pozitív egészekből álló szám k -asra, ha $k = 2$.
38. Legyen $F_0 = 0, F_1 = 1$, és $n \geq 2$ esetén az n -dik Fibonacci szám $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Igazoljuk, hogy F_n és F_{n+1} relatív prímek.