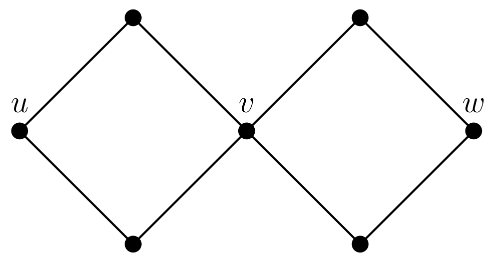
SzA VIII. gyakorlat, 2013. október 29/31.
Sok az összefüggés, néhány gráf pedig páros

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Igaz-e, hogy ha a(z irányítatlan) G gráfban van k db éldiszjunkt út u-ból v-be, és v-ből w-be is, akkor van k db éldiszjunkt út u-ból w-be is?**
Igaz, mert: tfh nincs, azaz legfeljebb $k-1$ éldiszjunkt út megy u-ból w-be. Ekkor ezeket az utakat $k-1$ él biztos lefogja (Menger), ezen élek elhagyásával a gráf szétesik, és u és w külön komponensbe kerül. v vagy az egyik, vagy a másik komponensben lesz (legyen mondjuk w komponensében, a másik eset ugyanez pepitában), azaz $k-1$ él elhagyásával az u és v közötti utakat lefogtuk. Ebből következik, hogy u és v között legfeljebb $k-1$ éldiszjunkt út mehet (Menger ismét), de ez ellentmond a feltevésnek.

2. **Igaz-e, hogy ha a(z irányítatlan) G gráfban van k db pontdiszjunkt út u-ból v-be, és v-ből w-be is, akkor van k db pontdiszjunkt út u-ból w-be is?**
Nem, ellenpélda ($k=2$):

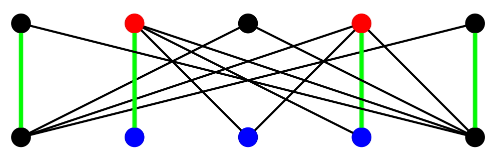


3. **Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre $K_{n,n}$ (teljes páros gráf) k-szorosan összefüggő!**
Ha elhagyunk egy teljes pontosztályt (n pontot), akkor a gráf nem lesz összefüggő, tehát $k \le n$. Ha viszont úgy hagyunk el valahány csúcsot, hogy az alsó és felső pontosztályban is marad, akkor a gráf összefüggő marad. Tehát legfeljebb $n-1$ csúcsot elhagyva mindkét pontosztályban mindenképp marad pont, így a gráf összefüggő marad, tehát $k \ge n$. A fentiekből $k = n$.

4. **Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf k-szorosan pontösszefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is!**
k-szorosan pontösszefüggő $\Leftrightarrow$ bármely két csúcsa között fut legalább k pontdiszjunkt út $\Rightarrow$ a pontdiszjunkt utak egyben éldiszjunktak is, vagyis bármely két csúcsa között fut legalább k éldiszjunkt út $\Leftrightarrow$ k-szorosan élösszefüggő.

5. **[ZH 2008. október 10.] Tegyük fel, hogy a G gráf k-szorosan élösszefüggő, F a G egy feszítőfája és e az F egy éle. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfnak legalább $k-1$ olyan, e-től különböző f éle van, amire igaz, hogy F-ből e-t törölve és f-et behúzva G egy feszítőfáját kapjuk.**
k-éöf-ből következik, hogy tetszőleges két csúcs között legalább k élidegen út megy. Vegyük e két végpontját (i és j), közöttük e-n kívül még legalább $k-1$ éldiszjunkt út megy. Egy ilyen e-től éldiszjunkt utat megnézve biztos van benne olyan f él, ami nincs benne F-ben, hiszen ha nem lenne, akkor kör lenne F-ben. Tehát e és f kicserélhető, és ez az érvelés igaz mind a $k-1$ darab e-től éldiszjunkt útra.

6. **Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!**



A zölddel jelölt élek egy 4 méretű párosítást alkotank. A 3 kékkel jelölt pont szomszédsága csak 2 elemű, így a Hall feltéltel nem teljesül, vagyis teljes (5 méretű) párosításunk nem lehet. Tehát a megtalált párosításunk maximális.

7. **Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!**
Válasszunk ki t fiút! Ha $t \leq 6$, akkor már egyiküknek is legalább 6 lányismerőse van. Ha $t \geq 7$, akkor tfh összesen kevesebb, mint t lányt ismernek. Ekkor egy olyan lány fiúismerőseinek száma, akit egyikőjük sem ismer: $12 - t \leq 5$, ami ellentmond a feltételnek. Ezek alapján tetszőleges t fiúnak összesen legalább t lányismerőse van, tehát tudunk adni egy teljes párosítást (Frobenius-tétel).

---

8. **[ppZH 2010. ősz] Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 20 csúcsa van és G 10-szeresen élösszefüggő. Mutassuk meg, hogy G-nek van Hamilton köre.**
Ha G 10-élöf, akkor minden csúcsának legalább 10 a foka, hiszen ellenkező esetben a minimális fokú csúcsból induló legfeljebb 9 él elhagyásától G szétesne. (4 pont)
A Dirac tétel szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton kör. (4 pont)
Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n = 20$-ra, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (2 pont)

9. **[ZH 2010. október 15.] Tegyük fel, hogy a G gráf 3-szorosan élösszefüggő és létezik Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy G 4-szeresen élösszefüggő.** A G gráf 3-élöf, ezért legfeljebb két élét elhagyva mindenképp összefüggő marad. (2 pont)
Mivel G-nek van Euler-körsétája, a tanultak szerint G minden csúcsának páros a fokszáma. (2 pont)
Azt kell igazolnunk, hogy G 4-élöf, azaz bárhogyan is hagyunk el G-ből legfeljebb 3 élt, G-nek összefüggőnek kell maradnia. (2 pont)
Tegyük fel indirekt, hogy ez nem így van, ami azt jelenti, hogy valahogyan elhagyható G-ből 3 él úgy, hogy G ettől szétessen. (1 pont)
Ha az ekkor keletkező komponensek egyikében a csúcsokat egy ponttá húzzuk össze, akkor olyan gráfot kapunk, amiben minden csúcs foka páros, kivéve az összehúzott csúcsét, aminek 3 a foka. (2 pont)
Ez azonban lehetetlen, hiszen tanultuk, hogy a fokszámösszeg minden véges gráfban páros, így a páratlan fokú csúcsok száma semmiképp sem lehet pontosan egy. A kapott ellentmondás a feladat állításának helyességét bizonyítja. (1 pont)

Megjegyzés (DM): ennél talán kevésbé elegáns, de sokaknak egyszerűbben kitalálható bizonyítás is van. Az eleje ugyanez (a fokszámok párosságáról nem kell beszélni), ezután tfh van 3 olyan él, amiket elhagyva szétesik a gráf. Kettőnél több részre nem eshet (meg kell gondolni, hogy ha nem így lenne, akkor nem lehetne 3-éöf), rajzoljuk fel úgy, hogy a két komponens pontjait szépen elkülönítjük. Ha egy Euler-kört megirányítunk, akkor világos, hogy balról jobbra és jobbról balra ugyanannyiszor kéne átmennünk, viszont ezt három élen megoldani lehetetlen.

10. **[ZH 2010. október 15.] Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?**
Ha i és j között él fut, akkor i és j közül pontosan az egyik páros, a másik páratlan. (3 pont)

Ez azt jelenti, hogy se két páros szám, se két páratlan szám között nem futhat él, (3 pont) így G valóban páros: a színosztályokat a 100-nál nem nagyobb páros ill. páratlan pozitív egészek alkotják. (4 pont)

Meg lehet persze másképp is oldani.
Sosem fut él két csúcs között akkor, ha azok 4-gyel osztva ugyanannyi maradékot adnak. (2 pont)
Két különböző maradékosztály között pedig csak akkor futhat él, ha a maradékok különbsége 1 vagy a 0-ás és a 3-as maradékosztályról van szó. (2 pont)
A G gráf tehát páros, hiszen az 1-es és 3-as ill. a 2-es és 0-ás maradékosztály között nem vezet él, és ezek adják a színosztályokat. (6 pont)

11. **A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!**
Hagyjuk el a kiválasztott élet a hozzátartozó csúcsokkal együtt! Az így keletkező gráfban minden szomszédság legfeljebb egy elemmel csökken, így $|N'(X)| \geq |N(X)| - 1 \geq |X|$ tetszőleges $X \subseteq A$-ra, kihasználva, hogy $|N(X)| > |X|$. A módosított gráfban a Frobenius-tétel szerint tehát van teljes párosítás, ehhez pedig hozzávehetjük az eredetileg választott élet, amivel már az eredeti gráfban is teljes párosításunk lesz.

12. **[pZH 2011. december 1.] Tekintsük a k-szorosan pontösszefüggő G gráf két diszjunkt példányát és kössük össze a két példányban az egymásnak megfelelő pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott G' gráf $(k+1)$-szeresen összefüggő.**
Mivel G k-öf volt, ezért $|V(G)| \geq k+1$, tehát $|V(G')| = 2 \cdot |V(G)| > k+1$ is teljesül, ami az egyik feltéltel ahhoz, hogy G' $k+1$-öf legyen. (1 pont)
A $k+1$-szeres pontösszefüggőség definíciója szerint tehát mindössze azt kell ellenőriznünk, hogy G' nem eshet szét legfeljebb k csúcs elhagyásától. (3 pont)
Tegyük fel tehát, hogy elhagytunk legfeljebb k csúcsot G'-ből. Ha nem ugyanabból a példányból hagytuk el az összeset, akkor G k-öf miatt biztos, hogy az egyes példányok nem eshettek szét, (2 pont)
továbbá a két példány között pedig biztos maradt él, mert G-nek legalább $k+1$ csúcsa van a k-öf tulajdonság miatt, így olyan csúcsának is kell lennie, aminek egyik példányát sem bántottuk a legfeljebb k csúcs törlésekor. (2 pont)
Ha mind a k csúcsot egy példányból hagytuk el, akkor pedig az itt maradó csúcsok közül biztos marad út bármely kettő között a másik példánybeli párjaikon keresztül. (2 pont)

13. **[ppZH 2012. december 12.] Legyen $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ az egyszerű G páros gráf egy színosztálya, és tegyük fel, hogy $d(a_i) > i$ teljesül minden $1 \leq i \leq n$ esetén. Igazoljuk, hogy G-ben van A-t fedő párosítás.**
A Hall feltétel szerint pontosan akkor van A-t fedő párosítás G-ben, ha az A tetszőleges X részhalmazára $|X| \leq |N(X)|$ teljesül. (3 pont)
Legyen tehát $X \subseteq A$, tegyük fel, hogy $|X| = k$. Ekkor van X-nek olyan a_i eleme, amire $i \geq k$ teljesül, hisz ha nem volna ilyen, akkor X-nek legfeljebb csak $k-1$ eleme lehetne. (3 pont)
Márpedig $|N(X)| \geq d(a_i) \geq i \geq k = |X|$, tehát a Hall feltétel valóban teljesül, (3 pont) van G-nek A-t fedő párosítása. (1 pont)

Avagy:

Az a feladatunk, hogy A minden a_i csúcsának találjunk egy-egy páronként különböző szomszédot. (1 pont)
Ezt mohón végezzük, sorra keresünk szomszédot az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ csúcsoknak. (2 pont)

Mivel $d(a_1) \geq 1$, ezért a_1-nek található pár. (1 pont)
Ha már találtunk párt az $a_1, a_2, \ldots, a_i$ csúcsoknak, akkor a_{i+1} szomszédai közül legfeljebb i olyan van, amit nem választhatunk a_{i+1} szomszédjának. (2 pont)
Mivel $d(a_{i+1}) \geq i+1$, ezért bizonyosan van a_{i+1}-nek olyan szomszédja, amelyeet még eddig nem választottunk ki korábban. (3 pont)
Azt kaptuk, hogy a mohó sorrendben dolgozva A minden csúcsának találunk párt, és nekünk pontosan ezt kellett igazolnunk. (1 pont)

14. **[pZH 2010. ősz] Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.**
A tanult Hall-tétel szerint pontosan akkor van G-ben A-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-feltétel, (2 pont)
azaz tetszőleges $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$. (1 pont)
Ezt fogjuk tehát ellenőrizni. A feltétel szerint létezik olyan $c \geq 1$ egész szám, amire $d(a) \geq c \geq d(b)$ teljesül minden $a \in A$ és $b \in B$ csúcsra. (1 pont)
Jelölje $E(X)$ az X-ből induló élek halmazát. Világos, hogy $c \cdot |X| \leq |E(X)| \leq c \cdot |N(X)|$, hiszen minden X-beli csúcsból legalább c különböző él indul, míg egy $N(X)$-beli csúcsra pedig legfeljebb c $E(X)$-beli él illeszkedhet. (4 pont)
Mivel $c \neq 0$ ezért bátran leoszthatunk: $|X| \leq |N(X)|$, (1 pont)
azaz teljesül a Hall-feltétel, csakugyan létezik G-ben A-t fedő párosítás. (1 pont)

15. **Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdaságiés egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?**
Definiáljunk egy páros $G(V, M, E)$ gráfot úgy, hogy egyik csúcsosztályba tartoznak a vadászterületek, másikba a mezőgazdasági területek, egy vadász- és mezőgazdasági terület pedig pontosan akkor van összekötve, ha a kettőnek van közös része. Könnyen látszik, hogy pontosan akkor létezik megfelelő területkiosztás, ha G-ben létezik teljes párosítás. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq V$ halmazt! Az ezekhez a csúcsokhoz tartozó összterület $|X|T/n$, ha T a sziget területe. Tfh kevesebb, mint $|X|$ mezőgazdasági területtel van közös területe X-nek. Ez azt jelenti, hogy $|X|T/n$ területet kellene lefedni kevesebb, mint $|X|$ darab T/n méretű területtel, ami nyilvánvalóan lehetetlen. Ezek alapján teljesül a Hall-feltétel, valamint $|V| = |M|$, tehát létezik teljes párosítás.

16. **[pZH 2009. november 17.] Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B, és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltéltel.**
(Ez a feladat inkább a következő feladatsorba illik.) A Hall-feltétel teljesülése az A színosztályra ekvivalens azzal, hogy van A-t lefedő párosítás, vagyis elég azt belátni, hogy $\nu(G) \geq |A|$. A feltétel szebben megfogalmazva azt jelenti, hogy $\rho(G) \leq |B|$ (és nincs izolált pont). Innen használhatjuk a megfelelő König-tételt, miszerint $\nu(G) + \rho(G) = n$, vagyis átrendezés után $\nu(G) = n - \rho(G) = |A| + |B| - \rho(G) \geq |A| + |B| - |B| = |A|$, és mi pont ezt akartunk igazolni.

17. **Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok. A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V = A \cup B \cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból**

az r-elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k-összefüggő?
Ha két halmaz összes elemét elhagyjuk ($2r$ pontot), akkor csak egy csomó diszjunkt pontunk marad, így a gráf legfeljebb $2r$-összefüggő. $2r - 1$ pontot viszont bárhogy is hagyunk el, a gráf összefüggő marad (ugyanolyan gondolatmenettel, mint az 1-es feladatban). Így $k = 2r$.

18. G **páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?**
Igaz, mert egy páros gráfban minden kör páros hosszú, így egy Hamilton kör is, aminek minden második éle pont egy teljes párosítást ad. Megfordítva nem igaz, pl. egy $2k$ csúcsú páros gráfban, ahol minden pont foka 1, van teljes párosítás, de Hamilton-kör biztos nincs.

19. **Bizonyítsuk be, hogy egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha a csúcsoknak minden valódi $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazából legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba!**
Egyik irány: k-szorosan élösszefüggő $\Rightarrow \emptyset \neq X \subset V$: legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba. Tfh kevesebb, mint k, ekkor ha ezeket az éleket elhagyjuk, X egy külön komponenst fog alkotni, vagyis nem lehetett volna k-szorosan élösszefüggő.
Másik irány: $\emptyset \neq X \subset V$: legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba $\Rightarrow$ k-szorosan élösszefüggő. Tfh a gráf nem k-szorosan élösszefüggő. Ekkor van olyan $k - 1$ él, amiket elhagyva a gráf több komponensre esik. Az egyik komponens csúcsai legyenek X, a többié pedig $V - X$. Ekkor e két halmaz között legfeljebb $k - 1$ él futhatott, ami ellentmond a feltételnek.

20. **A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen? (Mi választhatjuk meg, hogy mely éleket hagyjuk el.)**
Magyarul a feladat lényege: mennyi az a legkisebb élszámú 10 csúcsú gráf, ami 4-szeresen élösszefüggő? Mivel minden fokszám legalább 4 (különben 3 él elhagyásával a gráf már nem biztos, hogy összefüggő lenne), $e \geq 20$ (mert $10 \cdot 4 \leq 2e$). Ennyi elég is, mert a következő gráf 20 élet tartalmaz: 10 ponton keresztül két H-kör. Minden fokszám 4, és a két H-kör miatt tetszőleges két pont között van legalább éldiszjunkt 4 út, így 4-éöf. A teljes gráfból elhagyható élek száma tehát: $\binom{10}{2} - 20 = 25$.