SzA V. gyakorlat, 2013. október 8/QPAszünet. Hurrá, ZH! (most nincs új anyag)

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

1. **Egy bináris fa csúcsai 0 és 9 közötti egész számokkal vannak megcímkézve. Az inorder bejárás során a címkék sorrendje: 9, 3, 1, 0, 4, 2, 7, 6, 8, 5, a postorder bejárásnál pedig 9, 1, 4, 0, 3, x, 7, 5, y, 2. Mi lehet az x és mi az y?**
   2=gyökér (postorder miatt), 7,6,8,5 a jobb részfában van, többi a balban (inorder miatt). (3 pont)
   Két lehetőségünk van, $x = 6, y = 8$ és $x = 8, y = 6$. Ezeket kipróbálva (az akutális részfa gyökerét meghatározva, mint először) kijön, hogy előbbi lehet, (3 pont)
   utóbbi nem (4 pont)
   (ezeket végig kell számolni!)

2. **Az MSc-re jelentkezőknek a felvételit alkotó 3 témakör mindegyikéből lesz egy írásbeli pontszámuk (P_1, P_2, P_3), és keletkezik egy felvélteli pontszámuk is (FP). Tegyük fel, hogy a P_i-k 1 és 30 közötti egészek, míg az FP tetszőleges pozitív egész szám lehet. Adjunk meg egy olyan adatszerkezetet, amivel a következő műveletek az adott időben végrehajthatóak (n a jelentkezők számát jelöli)!**
   BESZÚR(P_1, P_2, P_3, FP): az adott pontszámok beillesztése – átlagosan $c \log n$
   KERES(p): a pontosan p felvételi ponttal ($FP = p$) rendelkező jelentkezők számát határozza meg – átlagosan $c \log n$
   KORLÁT(i, q): az írásbelin az i-edik témakörből legalább q pontot elért jelentkezők számát határozza meg – konstans
   Többféle adatszerkezetet is felhasználunk. FP-t tároljuk egy keresőfában annyi módosítással, hogy az egyes értékekhez egy számlálót is rendelünk, amit pontazonos beszúrás esetén használunk értelemszerűen. Innen az FP-re vonatkozó műveletek egyértelműek, a lépésszámok is jók.

   P_i nyilvántartására a ládarendezéshez hasonlóan tartsunk nyilván egy $P_i[1, \ldots, 30]$ tömböt kezdetben 0-ra inicializálva. Ekkor egy P_i pontos dolgozat beszúrásakor a megfelelő számlálót megnöveljük eggyel (konstans lépés). KORLÁT(i, q) ekkor így számolható: $\sum_{j=1}^{q} P_i[j]$, és mivel $q \leq 30$, ez tényleg konstans lépés.

   A kétféle adatszerkezt lépésszámait összevetve láthatjuk, hogy az előírt műveletek az előírt lépésszámokba beleférnek.

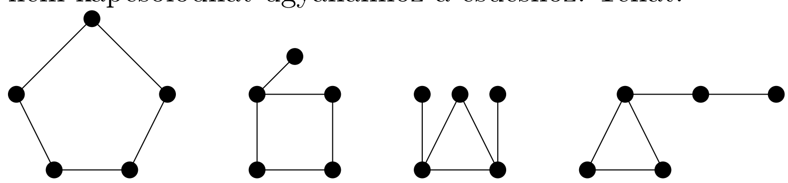
3. **Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?**
   Vegyük észre, hogy K_{60}-nak pont 1770 éle lenne! Ebből a mi gráfunknak 2 éle hiányzik. Tehát a kérdés: K_{60}-ból hogy hagyhatunk el két élet? Egyik lehetőség, hogy egy csúcs két élét hagyjuk el, másik pedig az, ha a két élet két különböző csúcstól hagyjuk el. Más lehetőségünk nincs, különben izomorf gráfokat kapnánk. Tehát 2.

4. **[pótZH, 2012. november 29.] Tegyük fel, hogy a háromszöget nem tartalmazó, irányítatlan, 100 csúcsú G egyszerű gráf 4-reguláris, azaz minden csúcs fokszáma 4. Hány olyan 3 élű részgráfja van G-nek, ami út?**
   A G gráf minden 3 élű sétája út, mivel G egyszeű és nincs benne háromszöget. (1 pont)
   Ezért elegendő megszámolni, hogy hány 3 élű séta van G-ben: a kérdezett utak száma ennek pontosan a fele lesz, hiszen minden útból pontosan két sétát lehet alkotni. (2 pont)
   A séta első csúcsa 100 féle lehet, hisz bármely csúcs szóba jön. A második csúcs a 4-regularitás miatt 4 féle lehet, (2 pont)
   míg a harmadik csúcs, az iménti három maradék szomszédjának valamelyike, így ez 3-féleképp választható, hasonlóan a negyedikhez. (3 pont)

A 3 élű séták száma tehát pontosan $100 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 = 3600$-nak adódik, így kérdezett részgráfok száma kereken $\frac{3600}{2} = 1800$. (2 pont)

5. **Hány olyan különböző fa adható meg n címkézett ponton, amely nem út?**
Cayley-tétel alapján a különböző fák száma n^{n-2}. Egy út az ténylegesen a csúcsok egy permutációja, ezeket majd le kell vonni, de előbb vegyük észre, hogy egy útnak két permutáció felel meg (oda és vissza). A végeredmény tehát: $n^{n-2} - n!/2$

6. **[ZH, 2006. március 28.] Rajzolja fel az összes olyan páronként nem izomorf egyszerű, összefüggő 5 pontú gráfot, amelyben pontosan egy kör van és a maximális fokszáma legfeljebb 3.**
A kör lehet 5, 4 vagy 3 hosszú. 5 hosszú esetben csak C_5 jöhet szóba, több él esetén létrehoznánk extra kör(öke)t. 4 hosszú esetén a kimaradt csúcsot egy éllel hozzá kell kötni a körhöz, más élt nem vehetünk fel kör létrehozása nélkül. 3 hosszú kör esetén a két kimaradó pont közül vagy mindkettő a körön van rajta, vagy egy 2 hosszú út van a körön. További élek szintén nem vehetők fel, valamint mindkét körön kívüli csúcs a fokszámkorlát miatt nem kapcsolódhat ugyanahhoz a csúcshoz. Tehát:



7. **[pótpótZH, 2012. december 12.] Izomorfak-e a** $(4, 4, 2, 2, 1, 5, 6, 1)$ **ill. az** $(5, 3, 3, 6, 1, 5, 6, 1)$ **Prüfer-kódú fák?**
Az órán olyat tanítottak, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs pontosan eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fabeli foka. (2 pont)
Az első fának van másodfokú csúcsa (pl az 5-ös címkéjű), míg a másodiknak nincs ilyen, ezért a fák nem lehetnek izomorfak. (8 pont)

Természetesen az is jó megoldás, ha vki dekódolja a fákat, és úgy mutatja meg, hogy azok nem izomorfak. Helyes dekódolásért $4 - 4$ pont jár, a nemizomorf tulajdonság megmutatásáért pedig 2.

Megjegyzés (DM): a fokszámok egyezősége szükséges, de nem elégséges feltétel az izomorfiához! Azaz ha a fokszámok mindkét fában megegyeznének (tetszőleges d fokú csúcsból ugyanannyi lenne az egyik és másik fában is), még fogalmunk sem lenne, hogy izomorfak-e! Feladat: két olyan fa rajzolása, ahol a fokszámok megegyeznek, mégsem izomorfak. (Megoldás külön pdf-ben itt: `http://www.cs.bme.hu/~drotos/sza2013osz/fa.pdf`)

8. **[pótZH, 2012. november 29.] Legyen F az a fa, aminek Prüfer-kódja** $(1, 3, 2, 3, 9, 3, 4, 4, 5, 5)$**. Hány komponensre esik szét F, ha töröljük a 3-mas címkéjű csúcsát?**
Tanultuk, hogy minden csúcs foka 1-gyel több, mint ahányszor a Prüfer-kódban szerepel. (3 pont)
A 3-mas címkéjű csúcs a kódban 3-szor fordul elő, így a fokszáma 4. (2 pont)
Ha tehát a 3-mas címkéjű csúcsot elhagyjuk F-ből, akkor a maradék gráfnak pontosan 4 komponense lesz. (5 pont)

Nem tilos persze F meghatározása sem. Járjon 7 pont a fa helyes felrajzolásáért, 3 pont pedig a 3-mas csúcs fokának megszámlálásáért és a válaszért.