SzA XII/XIII. gyakorlat, 2013. nov. 28/dec. 3.
$P?NP$

Drótos Márton
drotos@cs.bme.hu

Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P-beli, akkor **biztos**, hogy NP-beli és $coNP$-beli is!!!
- **P-beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem vezetünk vissza, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- **NP-beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. **Nem kell algoritmus a tanú előállítására**!!! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem vezetünk vissza, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.
- **NP-teljesség bizonyítása** π problémára:
  1. π NP-beliségének bizonyítása. Lásd fentebb.
  2. π NP-nehézségének bizonyítása:
     (a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismerten NP-teljes, ez legyen ρ (a feladatokban ez leggyakrabban: H-kör, H-út, k-szín, maxklikk, maxftln).
     (b) Bemutatunk egy $\rho \prec \pi$ Karp-redukciót, az irány fontos! Csak így jó!
     (c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha f az átalakítás: $x \in \rho \Leftrightarrow f(x) \in \pi$ a bizonyítandó. Figyelem! $\Leftrightarrow$! Akkor és csak akkor!
     (d) Belátjuk, hogy f polinom időben elvégezhető.
     (e) Örülünk.

Feladatok

1. **Gondolkozzunk el az NP-beliség, $coNP$-beliség, P-beliség és NP-teljesség fogalmakon!**
   De tényleg!

2. **Legyen a Π döntési probléma inputja egy G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van G-ben Hamilton-kör. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in NP$.**
   Tanú: egy Hamilton-kör. Tanú mérete: az n pont megfelelő sorrendje, ami nyilván polinomiális. Ellenőrzés: végigmegyünk a pontokon, megnézzük, hogy tényleg van-e közöttük él, valamint végigmentünk-e az összes ponton. Ez is nyilván polinomiális.

3. **[pótZH 2010. ősz] Legyen a Π döntési probléma inputja egy összefüggő G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen”, ha van G-ben Euler-körséta. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in coNP$.**
   Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges összefüggő gráfra hatékonyan rá tudjuk bizonyítani az Euler-körséta nemlétét, már persze amennyiben nincs benne ilyen. (3 pont)
   Azt tanították valaha, hogy egy véges, összefüggő G gráfban pontosan akkor van Euler-körséta, ha G-ben minden csúcs foka páros. (3 pont)
   Pontosan akkor nincs tehát Euler-körsétája G-nek, ha G-nek van páratlan fokú csúcsa. (2 pont)
   Egy ilyen csúcs megadása után pedig polinom időben lehet bizonyítani, hogy a foka páratlan, tehát nincs Euler-körséta G-ben. (2 pont)

Igazából arra is van idő, hogy mind az n csúcsot végignézzük, így a fentiekből tkp az is következik, hogy $\Pi \in P$. És persze jó bizonyítás az is, ha közvetlenül ezt mutatjuk meg, hisz $P \subseteq coNP$.

4. **Legyen a Π döntési probléma inputja egy G gráf, az output pedig pontosan akkor „igen", ha G síkbarajzolható. Mutassuk meg, hogy $\Pi \in NP \cap coNP$.**
   A legegyszerűbb indoklás az, hogy tudjuk, hogy a síkbarajzolhatóság eldöntése P-beli, valamint $P \subseteq NP$ és $P \subseteq coNP$, ezért $\Pi \in NP \cap coNP$.

   Persze külön-külön is be lehet bizonyítani. NP-beliség: tanú egy jó lerajzolás, azaz a pontok koordinátáinak megadása. A tanú mérete nyilván polinomiális. Ellenőrizni mondjuk úgy tudjuk, hogy mind az $\binom{e}{2}$ élpárra megvizsgáljuk, hogy metszik-e egymást. Egy vizsgálat konstans lépésben elvégezhető (egyenesek egyenlete alapján), így az ellenőrzés is polinomiális. $coNP$-beliség: tanú egy Kuratowski-gráffal topologikusan izomorf részgráf megadása a gráfban. A mérete nyilván polinomiális (hiszen nem nagyobb az eredeti gráfnál). Az ellenőrzéshez pedig csak azt kell vizsgálni, hogy tényleg részgráf-e, valamint a megengedett lépésekkel tényleg egy Kuratowski-gráfot kapunk-e. Ez nyilván polinomiális.

5. **Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! (Vagyis input: G és k; output: igen/nem). Hogy tudnánk ennek segítségével polinom időben meghatározni $\chi(G)$-t?**
   Bináris kereséssel. Rákérdezünk, hogy 1 színnel színezhető-e, Δ színnel színezhető-e, $\Delta/2$-vel, stb. Azaz $\log n$-szer egy polinomiális kérdés, ami még mindig polinomiális.

6. **Tegyük fel, hogy van egy algoritmusunk, ami polinom időben megmondja, hogy adott G gráf kiszínezhető-e legfeljebb k db színnel! A fentiek értelmében azt is megtudhatjuk polinom időben, hogy mennyi $\chi(G)$. Hogyan tudnánk kiszínezni polinom időben a gráfot $\chi(G)$ színnel?**
   Felveszünk egy $K_{\chi(G)}$-t G mellé, az egyes pontjai az egyes színeket jelölik. G első pontját hozzákötjük $K_{\chi(G)}$ minden egyes pontjához, kivéve egyhez. A „hozzákötetlen" pont fog megfelelni a választott színnek. Ezután megkérdezzük, hogy a gráf színezhető-e továbbra is $\chi(G)$ színnel. Ha igen, akkor megtaláltuk az adott pont színét, ha nem, akkor választunk újat. Ezt G összzes pontjára megcsináljuk, mindegyikre legfeljebb az összes színt próbáljuk végig, így $n^2 \cdot poli$ lépésből kész vagyunk.

7. **Bizonyítsuk be, hogy a 4-SZÍN probléma NP-teljes!**
   NP-beli: tanú egy jó színezés, ellenőrzés és méret polinomiális.
   NP-nehéz: adunk egy 3-SZÍN$\prec$4-SZÍN visszavezetést. Ha adott egy G gráf, amiről az a kérdés, hogy színezhető-e 3 színnel, akkor ebből csinálunk egy G' gráfot úgy, hogy G-hez hozzáveszünk egy extra pontot, amit G minden csúcsához hozzákötünk egy éllel. Azt kell belátni, hogy G akkor és csak akkor színezhető 3 színnel, ha G' színezhető 3 színnel. Ha G 3 színnel színezhető volt, akkor G'-t ki tudjuk úgy színezni 4 színnel, hogy a G-ből származó pontjai a 3 színezés szerinti színt kapják, míg az extra csúcs a negyedik színt. Ha G' 4 színnel színezhető, akkor az extra ponthoz használt szín sehol máshol nem szerepelhet, hiszen minden más pont szomszédos vele. Így a többi pont színezésére három szín marad, de ez pont az eredeti G gráf 3 színnel való színezését jelenti. Az átalakításhoz 1 pont és n él felvétele volt szükséges, vagyis az átalakítás polinomiális.

---

8. **Be tudjuk-e bizonyítani a következő problémák P, NP és $coNP$-beliségét? A szorgalmasak bizonyíthatnak egyes problémákra NP-teljességet is. Az input egy $G(V,E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$).**

(a) Van-e G-ben legalább k hosszú kör? (k az input része.)
$\in NP$: Tanú: egy legalább k hosszú kör. Tanú mérete: legfeljebb n (a kör pontjai), ami polinomiális. Ellenőrzés: a megadott pontokon végighaladva megnézzük, hogy tényleg kört alkotnak-e, és tényleg legalább k db-e; polinomiális.
Ez amúgy NP-teljes, a H-kört célszerű rá visszavezetni: adott G gráfban van-e H-kör kérdést átalakítjuk úgy, hogy az adott G gráfban van-e legalább n hosszú kör. Az átalakítás polinomiálissága és helyessége is triviális.

(b) **Kiszínezhetők-e G pontjai 2 színnel úgy, hogy legfeljebb 2 él kivételével minden él végpontjai különböző színűek?**
$\in P$: Elhagyunk az összes lehetséges módon két élet, és megnézzük, hogy a maradék gráf páros-e. Azaz $\binom{n}{2} \cdot poli \approx n^2 \cdot poli$, azaz polinomiális.
$\in NP$: következik $\in P$-ből.
$\in coNP$: következik $\in P$-ből.

(c) **Kiszínezhető-e G 4 színnel?**
$\in NP$: Tanú: egy jó színezés. Tanú mérete: minden ponthoz egy szám (az adott pont színe), azaz polinomiális. Ellenőrzés: minden élre megnézzük, hogy a végpontjaik különböző színűek-e, legfeljebb $c \cdot n^2$ lépés (élek száma), azaz polinomiális.
Ez amúgy ismerten NP-teljes probléma.

(d) **Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?**
$\in P$: Az összes $\binom{n}{15} \approx n^{15}$ részgráfot megnézzük, hogy teljes-e.
$\in NP$: következik $\in P$-ből.
$\in coNP$: következik $\in P$-ből.

(e) **Van-e G-ben egy legalább k pontú teljes részgráf? (k az input része.)**
$\in NP$: Tanú: egy k pontú teljes részgráf. Tanú mérete: legfeljebb n pont, azaz polinomiális. Ellenőrzés: megnézzük, hogy a tanú által kijelölt pontok közül mindegyik össze van-e kötve mindegyikkel, legfeljebb $c \cdot n^2$ lépés (élek száma), azaz polinomiális.
Ez amúgy a MAXKLIKK nevű, ismerten NP-teljes probléma.

(f) **Teljesül-e az Ore-feltétel?**
$\in P$: Az összes összekötetlen pontpárt megvizsgáljuk, és ellenőrizzük a fokszámaik összegét. Legfeljebb $c \cdot n^2$, azaz polinomiális.
$\in NP$: következik $\in P$-ből.
$\in coNP$: következik $\in P$-ből.

(g) **Van-e G-ben legfeljebb S súlyú (egyszerű) út? (S az input része.)**
$\in NP$: Tanú: egy ilyen út. Tanú mérete: az út pontjai vannak megadva, így legfeljebb n, azaz polinomiális. Ellenőrzés: végigmegyünk az úton, összeadjuk a súlyokat, közben figyeljük, hogy tényleg megvannak-e a szükséges élek; legfeljebb n lépés, polinomiális.
Ez NP-teljes is, a H-utat célszerű visszavezetni rá. Ha a kérdés az, hogy adott G gráfban van-e H-út, akkor ennek éleit súlyozzuk -1-gyel, és erre a gráfra kérdezzük meg, hogy van-e benne legfeljebb $-(n-1)$ összsúlyú út. Ha G-ben volt H-út, akkor ez pont egy $-(n-1)$ súlyú út lesz az új gráfban. Ha az új gráfban van legfeljebb $-(n-1)$ súlyú út, akkor az nyilván pont $-(n-1)$ hosszú, hiszen $n-1$ élnél többet nem tartalmazhat, ennyit viszont tartalmaz. Egy $n-1$ élet tartalmazó út egy gráfban pedig nyilván egy H-út. Az átalakítás triviálisan polinomiális.

(h) **Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?**
$\in NP$: Tanú: egy ilyen feszítőfa. Tanú mérete: pl. Prüfer-kóddal megadás esetén legfeljebb $n-2$, azaz polinomiális. Ellenőrzés: végignézzük, hogy tényleg feszítőfa-e, és a fokszámokat is figyeljük, legfeljebb n lépés, polinomiális. Amúgy ez pontosan a H-út probléma, így ismerten NP-teljes.

9. **[PZH 2008. december 5.] Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy egyszerű G gráf, az n és m számok, a kimenete pedig pontosan akkor „*igen*”, ha G-nek van olyan n csúcsú részgráfja, aminek legalább m éle van.**
   NP-beli: tanú egy ilyen részgráf, mérete nem lehet nagyobb a gráfénál, tehát polinomiális, az ellenőrzés pedig azt jelenti, hogy megnézzük, hogy tényleg részgráf-e, valamint a csúcsok és élek száma rendben van-e, ez nyilván polinomiális.
   NP-nehéz, mert MAXKLIKK $\prec \pi$. Ha G-ben valaki megkérdezi, hogy van-e k pontú klikk, akkor kérdezzük meg G-ről, hogy van-e benne k pontú és $\binom{k}{2}$ élű részgráf. G-ben van k pontú klikk $\Leftrightarrow$ G-ben van k pontú és $\binom{k}{2}$ élű részgráf. G-ben van k pontú klikk $\Rightarrow$ G-ben van k pontú és $\binom{k}{2}$ élű részgráf: G egy k pontú klikkje pont megfelelő. G-ben van k pontú klikk $\Leftarrow$ G-ben van k pontú és $\binom{k}{2}$ élű részgráf: ez a részgráf G egyszerűsége miatt nyilván csak a K_k lehet, ami def szerint egy k pontú klikk G-ben. Az átalakításhoz csak $\binom{k}{2}$-t kell kiszámolni, ami nyilván polinom idő.
   A probléma NP-beli és NP-nehéz, tehát NP-teljes.

10. **[ZH 2010. ősz] Igazoljuk, hogy a P és NP problémaosztályba egyaránt beletartozik annak eldöntése, hogy egy inputként megadott G irányítatlan gráfban létezik-e két különböző kör.**
    Az NP-beliséghez azt kell megmutatni, hogy „igen” válasz esetén (tehát ha van a gráfban két különböző kör) van hatékonyan (az inputméret polinomjával korlátozható számú lépésben) ellenőrizhető bizonyíték. (1 pont)
    Jelen esetben két különböző kör megadása ilyen, mert mindegyik körről hatékonyan eldönthető, hogy részgráf, kör, és hogy egymástól különböznek. (2 pont)
    A P-beliséghez azt kell igazolnunk, hogy van a problémára polinom idejű algoritmus. (1 pont)
    Tudjuk, hogy a BFS vagy a DFS mindegyike polinom idejű, és a megadott gráf minden komponensében egy-egy feszítőfát talál. (2 pont)
    Világos, hogy G minden egyes éle meghatároz egy-egy alapkört a feszítőfa bizonyos éleivel együtt. (1 pont)
    Ha tehát G-nek van legalább 2 olyan éle, ami nem éle a bejárási fának, akkor „igen” a válasz. (1 pont)
    Ha legfeljebb egy ilyen él van, akkor G-nek nincs más köre az alapkörön kívül, így „nem” a válasz. (1 pont)
    A döntési problémára tehát létezik polinom idejű algoritmus, azaz a probléma valóban P-beli. (1 pont)

    Az NP-beliség igazolható másképp is.

    Tudjuk, hogy $P \subseteq NP$, ezért elegendő megmutatni, hogy a vizsgált probléma P-beli, ebből az NP-beliség közvetlenül következik. (3 pont)

11. **[ZH 2009. november 23.] Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP-teljes!)**
    Input: G egyszerű gráf és $v \in V(G)$
    Kérdés: Van-e G-nek olyan feszítőfája, amelyben v az egyetlen olyan pont, aminek a foka legalább 3?

    Ez NP-teljes, mert:

    $\in NP$: tanú egy ilyen feszítőfa, a feszítőfaságot és a fokszámokat polinom lépésben ellenőrizni tudjuk, a mérete is értelemszerűen polinomiális.

$\in NP$-nehéz: a H-út problémát vezetjük rá vissza. Ha adott egy G gráf, amiről az a kérdés, hogy tartalmaz-e H-utat, akkor ebből csinálunk egy G' gráfot úgy, hogy felveszünk 4 pontot (u, v, w, x), x-et összekötjük G összes pontjával, v-t pedig u-val, w-vel és x-szel. A kérdés G'-re az, hogy van-e olyan feszítőfája, amiben v az egyetlen olyan pont, aminek foka legalább 3. G-ben van H-út $\Rightarrow$ (G', v) teljesíti a feltételt: G'-ben úgy csinálunk feszítőfát, hogy G H-útjának egyik végétől továbbmegyünk x-be, majd onnan v-be, és onnan u-ba és w-be. Így a feszítőfában v foka pontosan 3, a többi csúcs foka pedig 3-nál kisebb. (G', v) teljesíti a feltételt $\Rightarrow$ G-ben van H-út: ha G'-ben van egy megfelelő feszítőfánk, akkor az eredeti gráfban lévő része a feszítőfaság miatt biztos, hogy G minden csúcsát tartalmazza. Az nem lehet, hogy valahol G-ben „elágazik”, hiszen ez legalább harmadfokú csúcsot jelentene. Továbbá az is lehetetlen, hogy több helyen is „belép” G-be (diszjunkt utakat meghatározva), hiszen G csúcsaival csak x van összekötve, és ebben az esetben annak kéne legalább harmadfokúnak lenni, és ezzel kész is vagyunk. Az átalakítás (4 pont és $n+3$ él felvétele) nyilván polinomiális.

Fentiek alapján a probléma NP-teljes.

12. **Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP-teljes!)**
Input: G egyszerű gráf
Kérdés: Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?

NP-teljes, ugyanis: NP-beli, mert tanú egy ilyen feszfa (méret és ell poli!). NP-nehéz, mert H-út $\prec \pi$ (mint tudjuk, a H-út az egy olyan spec feszfa, ahol minden fokszám legfeljebb 2). Ha a kérdés, hogy G-ben van-e legfeljebb másodfokú pontokból álló feszfa, akkor G minden csúcsához vegyünk fel egy elsőfokú pontot (ami az adott csúccsal van összekötve), ez legyen G'! Ha G-ben van legfeljebb másodfokú csúcsokból álló feszfa, akkor ezt a feszfát G'-ben kiegészíthejük egy legfeljebb harmadfokú csúcsokat tartalmazó feszfává úgy, hogy az extra elsőfokú pontokba vezető éleket hozzávesszük (így minden fokszám pontosan eggyel nő). Ha G'-ben van legfeljebb harmadfokú csúcsokat tartalmazó feszfa, akkor az extra csúcsokba nyilván csak az egyetlen beléjük futó él lehet kiválasztva. Ha ezeket az éleket elhagyjuk, akkor minden fokszám eggyel csökken, tehát az extra pontok nélküli gráfrészben a feszfát nem rontjuk el, viszont minden fokszám eggyel csökkent, tehát csak max 2 lehet, de így pont G-ben kaptunk egy max másodfokú csúcsokból álló feszfát. n csúcs és él felvétele nyilván polinomiális.

13. **A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazzuk meg a feladathoz tartozó eldöntési problémát, és bizonyítsuk be, hogy NP-teljes!**
Az eldöntési probléma:

$$\pi = \left\{ (G, k) \;\middle|\; \begin{array}{l} G \text{ irányítatlan csúcssúlyozott gráf, amiben van} \\ \text{legfeljebb } k \text{ levélsúlyú feszítőfa} \end{array} \right\}$$

Ez NP-teljes. NP-beli, mert egy jó tanú egy ilyen feszítőfa (ellenőrzés polinom időben megy, a mérete is polinom). Adunk egy H-út $\prec \pi$ Karp-redukciót. Ha egy G gráfban Hamilton-utat keresünk, akkor minden csúcshoz rendeljünk 1 súlyt, és az így keletkezett G' gráfban keressünk legfeljebb 2 levélsúlyú feszítőfát! Állítás: $G \in$ H-út $\Leftrightarrow (G', 2) \in \pi$. $G \in$ H-út $\Rightarrow$ $(G', 2) \in \pi$: G egy Hamilton-útja pont egy két levelű, 2 súlyú feszítőfa G'-ben. $(G', 2) \in \pi \Rightarrow G \in H - ut$: egy ilyen feszítőfának pontosan 2 levele kell, hogy legyen (ha több lenne, nagyobb lenne a súlya, egy fában pedig mindig van legalább 2 levél). Ez pedig pont egy olyan utat jelent, ami tartalmazza a gráf összes csúcsát, tehát G egy Hamilton-útját. A csúcsoknak súlyt adni lehet polinom időben.

14. **Mi az alábbi probléma bonyolultsága? (Vagy bizonyítsa be, hogy polinom időben megoldható, vagy bizonyítsa be, hogy NP-teljes!)**
Input: G egyszerű gráf
Kérdés: G színezhető-e a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék?

A piros és kék színeket legfeljebb $n\binom{n-1}{2}$ féle módon oszthatjuk ki, ami polinomiális. Minden kiosztáshoz a maradék gráfot két színnel kell színezni, ami P-beli feladat. Így polinomszor kell egy polinom költségű algoritmust futtatni, ami polinom időben megy.

15. **[ZH 2008. november 17.] Bizonyítsuk be, hogy NP-teljes az a π döntési probléma, aminek a bemenete egy $100n$ pontú irányítatlan gráf, a kimenete pedig pontosan akkor „*igen*", ha G-nek van legalább n pontú köre.**
NP-beli: Tanú egy ilyen kör, ellenőrizni kell, hogy a gráf tényleg $100n$ pontú-e, és a kör tényleg kör-e és n pontú-e. A tanú mérete n ami $100n$ polinomja, az ellenőrzés legfeljebb n lépés után végetér, tehát ez is polinomiális.
NP-nehéz, mert H-kör $\prec \pi$. Adott G gráfhoz vegyünk hozzá $99n$ pontot, ez G'. Van H-kör G-ben $\Leftrightarrow$ van n pontú kör G'-ben. Van H-kör G-ben $\Rightarrow$ van n pontú kör G'-ben: tfh van H-kör G-ben, akkor ez pont egy n pontú kör G'-ben, ami $100n$ csúcsú, vagyis a feltétel teljesül. Van H-kör G-ben $\Leftarrow$ van n pontú kör G'-ben: az izolált pontokon nyilván nem mehet át a kör, tehát csak az eredeti gráfban mehet, de G-ben egy n hosszú kör pont H-kör. $99n$ pont felvétele polinom idő, tehát az átalakítás polinomiális.
A probléma NP-beli és NP-nehéz, tehát NP-teljes.