SzA VIII. gyakorlat

Összefüggően gondolkodunk párosításokban, néha görögbetűül

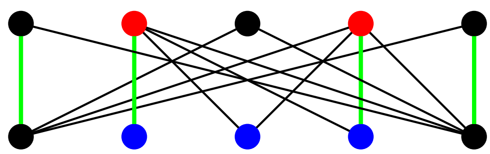
2012. október 25.

1. **Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre $K_{n,n}$ (teljes páros gráf) k-szorosan összefüggő!**
   Ha elhagyunk egy teljes pontosztályt (n pontot), akkor a gráf nem lesz összefüggő, tehát $k \leq n$. Ha viszont úgy hagyunk el valahány csúcsot, hogy az alsó és felső pontosztályban is marad, akkor a gráf összefüggő marad. Tehát legfeljebb $n-1$ csúcsot elhagyva mindkét pontosztályban mindenképp marad pont, így a gráf összefüggő marad, tehát $k \geq n$. A fentiekből $k = n$.

2. **Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf k-szorosan pontösszefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is!**
   k-szorosan pontösszefüggő $\Leftrightarrow$ bármely két csúcsa között fut legalább k pontdiszjunkt út $\Rightarrow$ a pontdiszjunkt utak egyben éldiszjunktak is, vagyis bármely két csúcsa között fut legalább k éldiszjunkt út $\Leftrightarrow$ k-szorosan élösszefüggő.

3. **[ZH 2008. október 10.] Tegyük fel, hogy a G gráf k-szorosan élösszefüggő, F a G egy feszítőfája és e az F egy éle. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfnak legalább $k-1$ olyan, e-től különböző f éle van, amire igaz, hogy F-ből e-t törölve és f-et behúzva G egy feszítőfáját kapjuk.**
   k-éöf-ből következik, hogy tetszőleges két csúcs között legalább k élidegen út megy. Vegyük e két végpontját (i és j), közöttük e-n kívül még legalább $k-1$ éldiszjunkt út megy. Egy ilyen e-től éldiszjunkt utat megnézve biztos van benne olyan f él, ami nincs benne F-ben, hiszen ha nem lenne, akkor kör lenne F-ben. Tehát e és f kicserélhető, és ez az érvelés igaz mind a $k-1$ darab e-től éldiszjunkt útra.

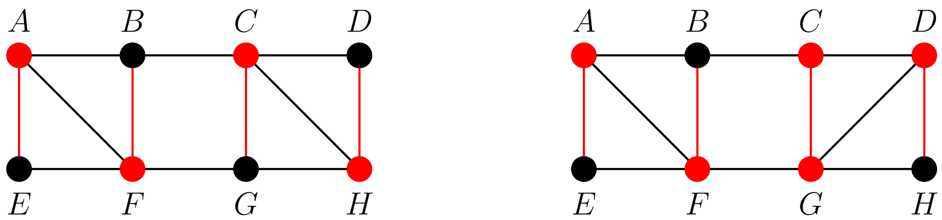
4. **Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!**

   A zölddel jelölt élek egy 4 méretű párosítást alkotank. A 3 kékkel jelölt pont szomszédsága csak 2 elemű, így a Hall feltétel nem teljesül, vagyis teljes (5 méretű) párosításunk nem lehet. Tehát a megtalált párosításunk maximális.

5. **Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!**
   Válasszunk ki t fiút! Ha $t \leq 6$, akkor már egyiküknek is legalább 6 lányismerőse van. Ha $t \geq 7$, akkor tfh összesen kevesebb, mint t lányt ismernek. Ekkor egy olyan lány fiúismerőseinek száma, akit egyikőjük sem ismer: $12 - t \leq 5$, ami ellentmond a feltételnek. Ezek alapján tetszőleges t fiúnak összesen legalább t lányismerőse van, tehát tudunk adni egy teljes párosítást (Frobenius-tétel).

6. **Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefogó ponthalmazt a következő gráfokban!**



$\{(A,E),(B,F),(C,G),(D,H)\}$ mindkét gráfban teljes párosítás, így maximális független élhalmaz is. A bal oldalon $\{A,C,F,H\}$ egy lefogó ponthalmaz, és minimális is, mivel $\tau \geq \nu$. A jobb oldalon $\{A,E,F\}$ és $\{D,G,H\}$ közül egyenként legalább 2, összesen tehát legalább 4 csúcsot ki kell választani, és ekkor még biztos, hogy ki fog maradni él (B,C), így $\tau \geq 5$. $\{A,C,D,F,G\}$ viszont pont jó is.

7. **Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!**
A teljes páros gráfban a kisebbik csúcsszámú osztályt lefedő párosítás biztos létezik, ennél nagyobb nem is lehet, így $\nu(G) = \min\{n,m\}$. König tétele értelmében $\nu(G) = \tau(G)$, ezért $\tau(G) = \min\{n,m\}$. Gallai tétele miatt $\alpha(G) = |V| - \tau(G) = (n+m) - \min\{n,m\} = \max\{n,m\}$. Ismét König tétele alapján $\rho(G) = \alpha(G) = \max\{n,m\}$.

8. **A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!**
Tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G)$, és egy teljes párosítás esetén $\nu(G) = n/2$. Ebből $678 = \tau(G) \geq \nu(G) = 1000$ ellentmondás, tehát nem lehet a gráfban teljes párosítás.

9. **Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n-1$, akkor $G = K_n$!**
Tfh mégsem teljes gráf, vagyis $\exists u, v \in V : (u,v) \notin E$. Ha minden csúcsot beválasztunk u-n és v-n kívül a lefogó pontok közé, akkor több csúcsra már nincs is szükségünk, hiszen az u-ba és v-be futó összes él is le van fogva a másik végpontja által (és természetesen a gráf összes többi éle is), ezt csak egy u-hoz vagy v-hez tartozó hurokél tudná elrontani, ami nincs. Így kiderült, hogy $\tau(G) \leq n-2$, ami ellentmond a feltételnek.

---

10. **[ppZH 2010. ősz] Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 20 csúcsa van és G 10-szeresen élösszefüggő. Mutassuk meg, hogy G-nek van Hamilton köre.**
Ha G 10-élöf, akkor minden csúcsának legalább 10 a foka, hiszen ellenkező esetben a minimális fokú csúcsból induló legfeljebb 9 él elhagyásától G szétesne. (4 pont)
A Dirac tétel szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton kör. (4 pont)
Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n = 20$-ra, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (2 pont)

11. **[ZH 2010. október 15.] Tegyük fel, hogy a G gráf 3-szorosan élösszefüggő és létezik Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy G 4-szeresen élösszefüggő.**
A G gráf 3-élöf, ezért legfeljebb két élét elhagyva mindenképp összefüggő marad. (2 pont)
Mivel G-nek van Euler-körsétája, a tanultak szerint G minden csúcsának páros a fokszáma. (2 pont)
Azt kell igazolnunk, hogy G 4-élöf, azaz bárhogyan is hagyunk el G-ből legfeljebb 3 élt, G-nek összefüggőnek kell maradnia. (2 pont)
Tegyük fel indirekt, hogy ez nem így van, ami azt jelenti, hogy valahogyan elhagyható G-ből 3 él úgy, hogy G ettől szétessen. (1 pont)
Ha az ekkor keletkező komponensek egyikében a csúcsokat egy ponttá húzzuk össze, akkor olyan gráfot kapunk, amiben minden csúcs foka páros, kivéve az összehúzott csúcsét, aminek 3 a foka. (2 pont)

Ez azonban lehetetlen, hiszen tanultuk, hogy a fokszámösszeg minden véges gráfban páros, így a páratlan fokú csúcsok száma semmiképp sem lehet pontosan egy. A kapott ellentmondás a feladat állításának helyességét bizonyítja. (1 pont)

12. **[ZH 2010. október 15.] Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?**
Ha i és j között él fut, akkor i és j közül pontosan az egyik páros, a másik páratlan. (3 pont)
Ez azt jelenti, hogy se két páros szám, se két páratlan szám között nem futhat él, (3 pont)
így G valóban páros: a színosztályokat a 100-nál nem nagyobb páros ill. páratlan pozitív egészek alkotják. (4 pont)

Meg lehet persze másképp is oldani.
Sosem fut él két csúcs között akkor, ha azok 4-gyel osztva ugyanannyi maradékot adnak. (2 pont)
Két különböző maradékosztály között pedig csak akkor futhat él, ha a maradékok különbsége 1 vagy a 0-ás és a 3-as maradékosztályról van szó. (2 pont)
A G gráf tehát páros, hiszen az 1-es és 3-as ill. a 2-es és 0-ás maradékosztály között nem vezet él, és ezek adják a színosztályokat. (6 pont)

13. **A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!**
Hagyjuk el a kiválasztott élet a hozzátartozó csúcsokkal együtt! Az így keletkező gráfban minden szomszédság legfeljebb egy elemmel csökken, így $|N'(X)| \geq |N(X)| - 1 \geq |X|$ tetszőleges $X \subseteq A$-ra, kihasználva, hogy $|N(X)| > |X|$. A módosított gráfban a Frobenius-tétel szerint tehát van teljes párosítás, ehhez pedig hozzávehetjük az eredetileg választott élet, amivel már az eredeti gráfban is teljes párosításunk lesz.

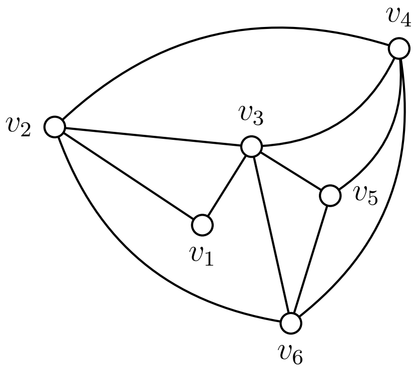
14. **[ppZH 2010. ősz] Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű G gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a $\nu(G)$ és a $\rho(G)$ értéke is megváltozik ennek hatására.**
Gallai idevágó tétele szerint ha G-ben nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = |V(G)|$. (3 pont)
Ennek megfelelően ha olyan 10 pontú gráfot találunk, aminek nincs izolált pontja, és amihez úgy lehet egy élt hozzáadni, hogy a $\nu(G)$ megváltozzon, akkor $\rho(G)$ is változni fog, tehát teljesülni fog a feladatban leírt tulajdonság. (3 pont)
Ilyen gráf pl. a 10 pontú csillag (az a 10 csúcsú fa, aminek 9 levele van), mert ebben a gráfban $\nu = 1$, de tetszőleges újabb élt behúzva $\nu = 2$ lesz. (4 pont)

Természetesen az is tökéletes megoldás, hogy egy konkrét gráfról és hozzáadott élről konkrétan megmutatjuk (Gallai nélkül), hogy a ν és a ρ is változik.

Megjegyzés by DM: természetesen nem csak a példaként hozott gráfra jár a pont; mindenki adhat az ízlésének megfelelőt, ami teljesíti a feltéltelt.

15. **A $V = \{2, 3, \ldots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$ ($a \nmid b$: a nem osztója b-nek)! Van-e G-ben teljes párosítás?**
Igen, van. A szomszédos számok relatív prímek, így fut közöttük él. A $(2, 3), (4, 5) \ldots (2006, 2007)$ pont egy teljes párosítás lesz.

16. **[ppZH 2011. december 14.] Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_i v_j : \frac{i+j}{i-j} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereket.**
A mellékelt ábrán látható a kérdésben szereplő gráf egy diagramja. (3 pont)



17. **Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!**
Egy páros gráfban a két pontosztály közül az egyik csúcsszáma mindig $\geq n/2$. Az egy osztályba tartozó csúcsok között biztos nem megy él, ezért egy osztály összes csúcsa független, és ha a nagyobb csúcsszámú osztályt vesszük, pont az állítást kapjuk.

18. **[ZH 2009. október 19.] Legyen G az a gráf, mely hét darab egyenként 287 pontú teljes gráf pontdiszjunk egyesítése. Határozzuk meg az $\alpha(G), \tau(G), \rho(G), \nu(G)$ értékeket!**
A gráfunk úgy néz ki, hogy egymás mellé lerajzolunk 7 db K_{287}-et. Innen az egyes értékeket elég egy K_{287}-re kiszámolni, majd mindegyiket megszorozni 7-tel (némi indoklás kíséretében). A számok kitalálását mindenkinek a fantáziájára bízom.

19. **[pZH 2011. december 1.] Tekintsük a k-szorosan pontösszefüggő G gráf két diszjunkt példányát és kössük össze a két példányban az egymásnak megfelelő pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott G' gráf $(k+1)$-szeresen összefüggő.**
Mivel G k-öf volt, ezért $|V(G)| \geq k+1$, tehát $|V(G')| = 2 \cdot |V(G)| > k+1$ is teljesül, ami az egyik feltéltel ahhoz, hogy G' $k+1$-öf legyen. (1 pont)
A $k+1$-szeres pontösszefüggőség definíciója szerint tehát mindössze azt kell ellenőriznünk, hogy G' nem eshet szét legfeljebb k csúcs elhagyásától. (3 pont)
Tegyük fel tehát, hogy elhagytunk legfeljebb k csúcsot G'-ből. Ha nem ugyanabból a példányból hagytuk el az összeset, akkor G k-öf miatt biztos, hogy az egyes példányok nem eshettek szét, (2 pont)
továbbá a két példány között pedig biztos maradt él, mert G-nek legalább $k+1$ csúcsa van a k-öf tulajdonság miatt, így olyan csúcsának is kell lennie, aminek egyik példányát sem bántottuk a legfeljebb k csúcs törlésekor. (2 pont)
Ha mind a k csúcsot egy példányból hagytuk el, akkor pedig az itt maradó csúcsok közül biztos marad út bármely kettő között a másik példánybeli párjaikon keresztül. (2 pont)

20. **[pZH 2010. ősz] Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.**
A tanult Hall-tétel szerint pontosan akkor van G-ben A-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-feltétel, (2 pont)
azaz tetszőleges $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$. (1 pont)
Ezt fogjuk tehát ellenőrizni. A feltétel szerint létezik olyan $c \geq 1$ egész szám, amire $d(a) \geq c \geq d(b)$ teljesül minden $a \in A$ és $b \in B$ csúcsra. (1 pont)
Jelölje $E(X)$ az X-ből induló élek halmazát. Világos, hogy $c \cdot |X| \leq |E(X)| \leq c \cdot |N(X)|$,

hiszen minden X-beli csúcsból legalább c különböző él indul, míg egy $N(X)$-beli csúcsra pedig legfeljebb c $E(X)$-beli él illeszkedhet. (4 pont)
Mivel $c \neq 0$ ezért bátran leoszthatunk: $|X| \leq |N(X)|$, (1 pont)
azaz teljesül a Hall-feltétel, csakugyan létezik G-ben A-t fedő párosítás. (1 pont)

21. **Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági- és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?**
Definiáljunk egy páros $G(V, M, E)$ gráfot úgy, hogy egyik csúcsosztályba tartoznak a vadászterületek, másikba a mezőgazdasági területek, egy vadász- és mezőgazdasági terület pedig pontosan akkor van összekötve, ha a kettőnek van közös része. Könnyen látszik, hogy pontosan akkor létezik megfelelő területkiosztás, ha G-ben létezik teljes párosítás. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq V$ halmazt! Az ezekhez a csúcsokhoz tartozó összterület $|X|T/n$, ha T a sziget területe. Tfh kevesebb, mint $|X|$ mezőgazdasági területtel van közös területe X-nek. Ez azt jelenti, hogy $|X|T/n$ területet kellene lefedni kevesebb, mint $|X|$ darab T/n méretű területtel, ami nyilvánvalóan lehetetlen. Ezek alapján teljesül a Hall-feltétel, valamint $|V| = |M|$, tehát létezik teljes párosítás.

22. **[pZH 2009. november 17.]** Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B, és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltéltel.

23. **A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!**
A Dirac-tétel miatt a gráfban van Hamilton-kör, és mivel páros csúcsa van a gráfnak, a Hamilton-kör minden második élét kiválasztva egy teljes párosítást kapunk, vagyis $\nu(G) = 2n/2 = n$. Gallai tétele szerint pedig (amit nyugodtan alkalmazhatunk, hiszen nem lehet izolált pontja) $\rho(G) = |V| - \nu(G) = 2n - n = n$.

24. **Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!**
Tudjuk, hogy a fentiek miatt $\nu(G) = n$, viszont azt is tudjuk, hogy $\tau(G) \geq \nu(G) = n$.

Hasznos tudnivalók

- Hall: $G(A, B, E)$ páros gráfban van A-t lefedő párosítás $\Leftrightarrow |X| \leq |N(X)| \quad \forall X \subseteq A$
- $\alpha(G)$: független csúcsok maximális száma G-ben
- $\nu(G)$: független élek maximális száma G-ben (maximális párosítás)
- $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma G-ben (csak akkor értelmezett, ha nincs izolált pont)
- $\tau(G)$: lefogó csúcsok minimális száma G-ben
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$, $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Gallai: $\alpha(G) + \tau(G) = n$, valamint ha nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$
- König: páros gráfokra! $\nu(G) = \tau(G)$; $\alpha(G) = \rho(G)$, ha nincs izolált pont
- Tutte: $G(V, E)$ gráfban $\exists$ teljes párosítás $\Leftrightarrow$ G-ből elhagyva tetszőleges $S \subseteq V$ pontokat a keletkező gráf páratlan csúcsú komponenseinek száma nem nagyobb $|S|$-nél.