SzA VIII. gyakorlat

Összefüggően gondolkodunk párosításokban, néha görögbetűül

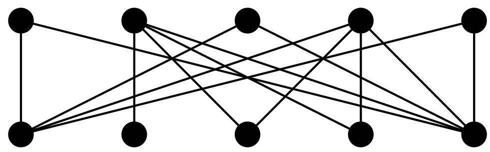
2012. október 25.

1. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre $K_{n,n}$ (teljes páros gráf) k-szorosan összefüggő!

2. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf k-szorosan pontösszefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is!

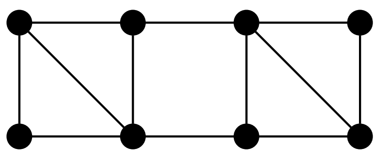
3. **[ZH 2008. október 10.]** Tegyük fel, hogy a G gráf k-szorosan élösszefüggő, F a G egy feszítőfája és e az F egy éle. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfnak legalább $k-1$ olyan, e-től különböző f éle van, amire igaz, hogy F-ből e-t törölve és f-et behúzva G egy feszítőfáját kapjuk.

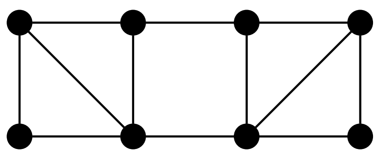
4. Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!



5. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!

6. Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefogó ponthalmazt a következő gráfokban!





7. Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!

8. A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!

9. Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n-1$, akkor $G = K_n$!

---

10. **[ppZH 2010. ősz]** Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 20 csúcsa van és G 10-szeresen élösszefüggő. Mutassuk meg, hogy G-nek van Hamilton köre.

11. **[ZH 2010. október 15.]** Tegyük fel, hogy a G gráf 3-szorosan élösszefüggő és létezik Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy G 4-szeresen élösszefüggő.

12. **[ZH 2010. október 15.]** Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?

13. A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!

14. **[ppZH 2010. ősz]** Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű G gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a $\nu(G)$ és a $\rho(G)$ értéke is megváltozik ennek hatására.

15. A $V = \{2, 3, \ldots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$ ($a \nmid b$: a nem osztója b-nek)! Van-e G-ben teljes párosítás?

16. **[ppZH 2011. december 14.]** Legyen a $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$, élei pedig $E = \{v_i v_j : \frac{i+j}{i-j} \in \mathbb{Z}\}$. Határozzuk meg a $\nu(G)$, $\tau(G)$, $\alpha(G)$, $\rho(G)$ paramétereket.

17. Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!

18. **[ZH 2009. október 19.]** Legyen G az a gráf, mely hét darab egyenként 287 pontú teljes gráf pontdiszjunk egyesítése. Határozzuk meg az $\alpha(G), \tau(G), \rho(G), \nu(G)$ értékeket!

19. **[pZH 2011. december 1.]** Tekintsük a k-szorosan pontösszefüggő G gráf két diszjunkt példányát és kössük össze a két példányban az egymásnak megfelelő pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott G' gráf $(k + 1)$-szeresen összefüggő.

20. **[pZH 2010. ősz]** Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.

21. Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági- és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?

22. **[pZH 2009. november 17.]** Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B, és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltéltel.

23. A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!

24. Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!

Hasznos tudnivalók

- Hall: $G(A, B, E)$ páros gráfban van A-t lefedő párosítás $\Leftrightarrow$ $|X| \leq |N(X)| \quad \forall X \subseteq A$
- $\alpha(G)$: független csúcsok maximális száma G-ben
- $\nu(G)$: független élek maximális száma G-ben (maximális párosítás)
- $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma G-ben (csak akkor értelmezett, ha nincs izolált pont)
- $\tau(G)$: lefogó csúcsok minimális száma G-ben
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$, $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Gallai: $\alpha(G) + \tau(G) = n$, valamint ha nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$
- König: páros gráfokra! $\nu(G) = \tau(G)$; $\alpha(G) = \rho(G)$, ha nincs izolált pont
- Tutte: $G(V, E)$ gráfban $\exists$ teljes párosítás $\Leftrightarrow$ G-ből elhagyva tetszőleges $S \subseteq V$ pontokat a keletkező gráf páratlan csúcsú komponenseinek száma nem nagyobb $|S|$-nél.