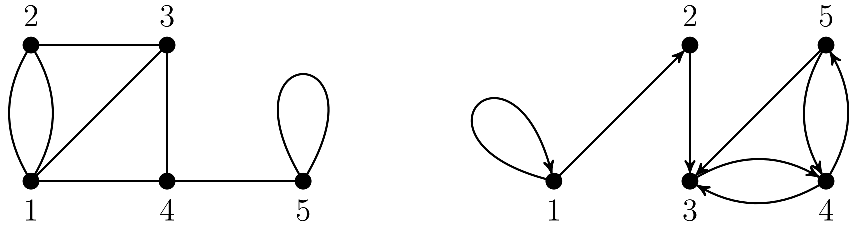
SzA IV. gyakorlat

Barátkozás a gráfokkal

2012. szeptember 27.

1. **Írjuk fel a következő gráfok szomszédossági mátrixát!**



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. **Adott egy 5 pontú gráf élek nélkül. Írjuk fel a láncolt szomszédossági listáját, majd húzzuk be sorrendben a következő (irányítatlan) éleket: (1,3), (4,5), (5,5), (2,3), (1,2), (3,4), (1,4), (1,2).**
Csak a végeredményt írom fel. A csúcshoz tartozó mutatók listája:

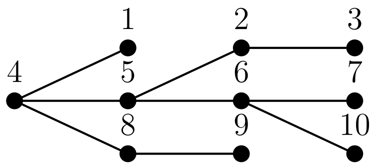
14	15	10	13	5

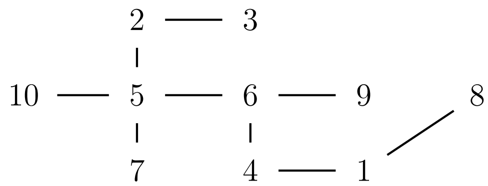
.
Az éleket leíró láncolt lista:

3	1	5	4	5	3	2	2	1	4	3	4	1	2	1
*	*	*	*	4	*	2	1	6	7	3	8	11	12	9

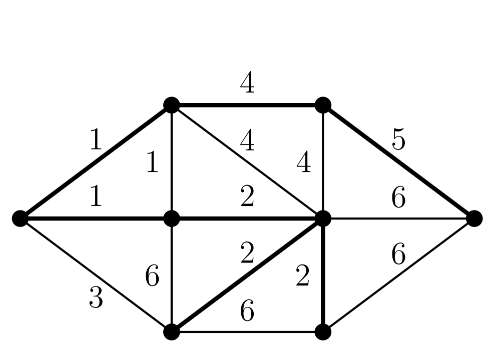
Reményeim szerint nem írtam el semmit, de azért van rá esély, hogy mégis.

3. (a) **Mi a Prüfer-kódja a következő fának?**
4,2,5,6,8,4,5,6
(b) **Rajzoljuk le azt a fát, aminek** $2, 5, 5, 1, 4, 6, 6, 5$ **a Prüfer-kódja!**





4. **Mennyi a következő gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van?**



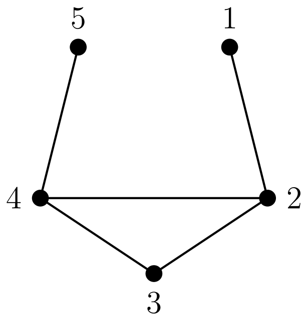
Egy lehetséges megoldás az ábrán jelölve. A 3 darab 1 súlyú élek közül pontosan bármelyik kettőt kell választani, és két 4 súlyú él közül pontosan 1-et kell választani. Más választási lehetőség nincs, ezek viszont függetlenek. Így a lehetőségek száma: $\binom{3}{2}\binom{2}{1}$.

---

5. **[ZH 2009. november 23.] A következő tömbök egy gráf szomszédossági listáját írják le. A csúcshoz tartozó mutatók listája:** | 3 | 6 | 5 | 4 | 2 |. **Az éleket leíró láncolt lista:**

4	4	2	3	2	3	2	4	5	1
10	*	*	7	8	1	9	*	*	*

Rajzolja le a gráfot!

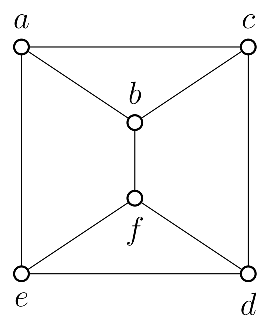


6. **[pótZH, 2011. december 1.] Az egyszerű, irányítatlan, 3-reguláris G gráf szomszédossági mátrixának bizonyos elemei kitörlődtek, csupán az alábbi maradt meg:**

$$A(G) = \begin{pmatrix} ? & 1 & ? & ? & ? & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & 1 & ? & 1 & 0 & ? \\ ? & ? & 1 & 0 & 1 & ? \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1 \\ ? & ? & ? & 1 & 1 & ? \end{pmatrix}$$

Rajzoljuk le a G gráfot (pontosabban annak egy diagramját).
Mivel G egyszerű, ezért nincs benne hurokél, így a szomszédossági mátrix főátlójában csak 0-k szerepelnek. (2 pont)
Irányítatlan gráfról lévén szó a szomszédossági mátrix szimmetrikus, azaz tetszőleges i, j-re ugyanaz a szám áll az (i, j) és a (j, i) helyeken. (2 pont)
Tudjuk még, hogy G 3-reguláris, ezért a mátrix minden sorában és minden oszlopában pontosan 3 a beírt számok összege. (2 pont)
Ennek alapján a mátrix könnyen kiszudokuzható az alábbiak szerint: (2 pont)

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



A jobb oldali ábra pedig G egy lehetséges diagramját mutatja. (2 pont)

7. **Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?**
A $\binom{n}{2}$ lehetséges él mindegyikéről függetlenül döntünk, hogy be legyen-e húzva, így $2^{\binom{n}{2}}$.

8. **[pótZH, 2008. december 5.] A K_6 gráf minden éléhez kiválasztunk 3 különböző számot az $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tesszük ezt,**

lesz két különböző él, amikhez ugyanazt a három számot választottuk.
A K_6 teljes gráfnak $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ éle van. (3 pont)
Az élekhez választott lehetséges számhármasok száma $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$. (3 pont)
Mivel $15 > 10$, ezért a skatulya-elv szerint lesz két olyan él, amihez ugyanaz a számhármas tartozik. (4 pont)

9. **Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros!**
Tfh nem igaz, vagyis a páratlan fokszámú pontok száma páratlan. Ekkor írjuk fel a fokszámok összegét:

$$\sum_{v\in V} d(v) = 2e,$$

ahol a jobb oldalon egy páros szám áll. A bal oldal paritásában nem számítanak a páros fokszámok, így páratlan darab páratlan fokszám összege is páratlan, tehát a bal oldal páratlan, ami lehetetlen, tehát páros darab páratlan fokszámú pontnak kell lennie.

10. **Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!**
Tudjuk, hogy egy n csúcsú fának $n-1$ éle van, továbbá egy e élű gráf komplementerének $\binom{n}{2} - e$ éle van, két izomorf gráf éleinek száma pedig megegyezik. Így $n - 1 = \binom{n}{2} - (n-1)$, ahonnan $n = 1$ vagy $n = 4$, tehát csak 1 és 4 csúcsú fák jöhetnek szóba. Az egy csúcsú egyértelmű, és megnézve jó is. 4 csúcsú esetén az elsőfokú pontok száma lehet 2, így a 4 hosszú utat kapjuk, ami pont jó is. Ha az elsőfokú pontok száma 3 lenne, akkor a gráfot („csillag") felrajzolva látjuk, hogy nem jó. Más 4 csúcsú fa pedig nem lehet.

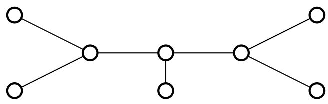
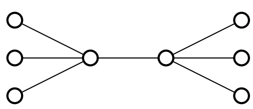
11. **[ZH, 2011. október 13.] Az F fa Prüfer kódja** $(1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4)$**. Hány éle van F komplementerének?**
A Prüfer kód hossza 10, ezért az általa kódolt fának 12 csúcsa van. (2 pont)
Ezért az F fa élszáma 11. (3 pont)
A 12 pontú teljes gráf éleinek száma $\binom{12}{2} = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$, (3 pont)
ezért a komplementernek $66 - 11 = 55$ éle van. (2 pont)

Természetesen nem tilos F meghatározása sem. Aki csak ennyit tesz, annak az első 5 pont jár.

12. **Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?**
Az egyik fokszám nyilván 1, és $x \geq 2$ van belőle. A másik legyen d, és $8 - x$ van belőle. Felírva a fokszámok és élszámok közötti összefüggést, tudván, hogy 7 élünk van:

$$x \cdot 1 + (8 - x)d = 2 \cdot 7,$$

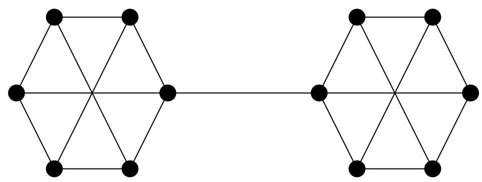
ahonnan $d = 1 + \frac{6}{8-x}$. Így az egészség követelménye és a feltételek alapján a következő megoldások lehetségesek:

- $(x = 2, d = 2)$, és ilyen fa létezik is: egy 8 hosszú út.
- $(x = 5, d = 3)$, és ilyen fa létezik is: 
- $(x = 6, d = 4)$, és ilyen fa létezik is: 
- $(x = 7, d = 7)$, és ilyen fa létezik is: egy 7 ágú csillag.

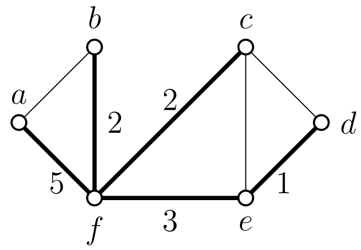
Fontos, hogy az eredményeket ellenőriztük is, azaz igazoltuk, hogy tényleg létezik a megfelelő fa.

13. **Legalább hány összehasonlítás kell ahhoz, hogy egy n elemű tömbből egy olyan tagot találjunk meg, ami a tömb 10 legkisebb eleme közé tartozik?**
$n-10$ elég, hiszen ha kidobunk 9 random számot, a maradékból $(n-9)-1$ lépésben egy minimálisat keresve biztos, hogy a 10 legkisebb közül egyet találunk. $n-10$ kell is, mert tfh ennél kevesebbet használva az összehasonlítottsági gráfnak legalább 11 komponense lesz, így (a minimumkeresés alsó korlátjának bizonyításával analóg módon) egy ellenség meg tudja akadályozni, hogy jó megoldást találjunk.

14. **[pótZH, 2008. december 5.] Legfeljebb hány pontja lehet annak a 19 élű G gráfnak, amiben minden pont fokszáma legalább 3?**
Felírva a fokszámok és élszám közötti összefüggést, majd a feltétel szerint felírva az egyenlőtlenséget:
$$2 \cdot 19 = \sum d(v) \geq 3n,$$
ahonnan $n \leq 12$. Ilyen gráfot tudunk is rajzolni, pl.:

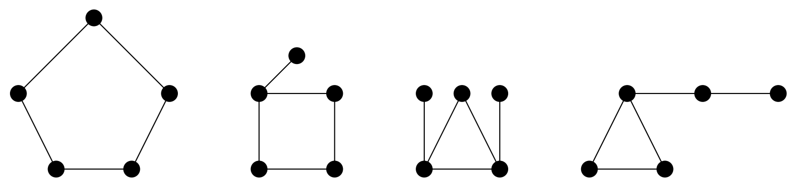


15. **[ZH, 2011. október 13.] Az ábrán látható G gráfnak megjelöltük egy F feszítőfáját és a feszítőfa éleinek súlyait. Határozzuk meg, mennyi lehet a G gráf feszítőfán kívüli éleinek minimális összsúlya akkor, ha F minimális súlyú feszítőfája G-nek.**



Ahhoz, hogy F minimális súlyú feszítőfa legyen az szükséges, hogy a fába be nem választott élek bármelyikét ha becseréljük a két végpontja között futó fabeli út valamelyik élére, attól a keletkező fa súlya ne csökkenhessen, (3 pont)
azaz bármely fán kívüli él súlya legalább annyi legyen, mint a végpontjai között futó F-beli úton lévő élek súlyainak maximuma. (3 pont)
Ez konkrétan azt jelenti, hogy az ab él súlya legalább 5, a cd élé legalább 3, végül a ce él is legalább 3 súlyú. (3 pont)
Ha pedig ezeket a súlyokat adjuk a fenti éleknek, akkor az órán tanult Kruskal algoritmus meg tudja találni az F fát. (1 pont)
Az tehát a válasz, hogy a maradék élek összsúlya legalább $5+3+3=11$. (1 pont)

16. **[ZH, 2006. március 28.] Rajzolja fel az összes olyan páronként nem izomorf egyszerű, összefüggő 5 pontú gráfot, amelyben pontosan egy kör van és a maximális fokszáma legfeljebb 3.**
A kör lehet 5, 4 vagy 3 hosszú. 5 hosszú esetben csak C_5 jöhet szóba, több él esetén létrehoznánk extra kör(öke)t. 4 hosszú esetén a kimaradt csúcsot egy éllel hozzá kell kötni a körhöz, más élt nem vehetünk fel kör létrehozása nélkül. 3 hosszú kör esetén a két kimaradó pont közül vagy mindkettő a körön van rajta, vagy egy 2 hosszú út van a körön. További élek szintén nem vehetők fel, valamint mindkét körön kívüli csúcs a fokszámkorlát miatt nem kapcsolódhat ugyanahhoz a csúcshoz. Tehát:



17. **Egy n pontú fa Prüfer-kódjában k különböző szám szerepel. Hány elsőfokú pontja lehet ekkor a fának?**
Tudjuk, hogy minden sorszám pontosan az adott pont fokszámánál eggyel kevesebbszer szerepel a kódban. Az elsőfokú pontok tehát pontosan 0-szor szerepelnek. Ha kódban n pont közül k féle szerepel, akkor $n-k$ féle nem, vagyis ennyi elsőfokú pont van.

18. **Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?**
Vegyük észre, hogy K_{60}-nak pont 1770 éle lenne! Ebből a mi gráfunknak 2 éle hiányzik. Tehát a kérdés: K_{60}-ból hogy hagyhatunk el két élet? Egyik lehetőség, hogy egy csúcs két élét hagyjuk el, másik pedig az, ha a két élet két különböző csúcstól hagyjuk el. Más lehetőségünk nincs, különben izomorf gráfokat kapnánk. Tehát 2.

19. **Hány olyan különböző fa adható meg n címkézett ponton, amely nem út?**
Cayley-tétel alapján a különböző fák száma n^{n-2}. Egy út az ténylegesen a csúcsok egy permutációja, ezeket majd le kell vonni, de előbb vegyük észre, hogy egy útnak két permutáció felel meg (oda és vissza). A végeredmény tehát: $n^{n-2} - n!/2$

20. **Hány éle van az n pontú egyszerű összefüggő gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?**
A gráfban biztosan van kör, különben nem lehetne több feszítőfa. Egy k hosszú körből tetszőleges él kihagyásával különböző feszítőfákat csinálhatunk, így esetünkben legfeljebb egy darab, három hosszú kör lehet. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha egy élet elhagyva már fát kapunk, tehát $n-1+1=n$ csúcsú a gráf.

21. **Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?**
A Kruskal algoritmus először az 1 súlyú élek közül fog választani, belőlük tud építeni egy $k-1$ elű fát. Utána a 2 súlyúak következnek, belőlük $l-1$-et lehet választani. A végén az x_i és y_j pontokon lesz két feszítőfa, ezeket muszáj egy 3 súlyú éllel összekötni. Tehát $(k-1)\cdot 1 + (l-1)\cdot 2 + 3 = k + 2l$.

22. **Igaz-e, hogy tetszőleges G egyszerű gráf esetén vagy G, vagy a komplementere összefüggő?**
Igaz, mert egyszrészt ha G összefüggő, akkor kész vagyunk, ha pedig G nem összefüggő, akkor a komplementere az lesz (bizonyítás a 26. feladatban).

23. **Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$!**
Tfh a másodfokú pontok száma $n-3$. Ekkor mivel van legalább két elsőfokú pont, már csak egy pont fokszáma kérdéses. Tudjuk, hogy $n-1$ él van, így a fokszámok összege $1+1+(n-3)\cdot 2 + d = 2e = 2\cdot(n-1)$, ahonnan $d=2$ adódna, viszont ez ellentmond a feltételnek, hiszen $n-2$ másodfokú pont lenne.

24. **Igaz-e, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör?**
Számozzuk meg a csúcsokat az $1\ldots n$ számokkal, és az élek mindig a kisebb sorszám felől a nagyobb felé legyenek irányítva. Tfh van kör, ami áthalad az i csúcson: ekkor sorban a kör csúcsai: $i < j < \cdots < k < i$, ami ellentmondás, tehát a gráfban nincs irányított kör.

25. **Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!**
Tfh nem összefüggő. Ekkor nyilván legalább két komponense van. Vegyük a legkisebb (k) csúcsszámú komponensét, aminek legfeljebb $n/2$ csúcsa van (skatulya elv)! Mivel a gráf egyszerű, ezért ebben a komponensben a legnagyobb fokszám legfeljebb $k-1$ lehet, viszont $k-1 \leq n/2-1$. Ennek a komponensnek a fokszámai tehát a feltétellel együtt a következőt kell, hogy teljesítsék: $n/2 \leq d_i \leq n/2-1$, ami lehetetlen.

26. **Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!**
Tfh nem összefüggő. Ekkor léteznek olyan x és y csúcsok melyek különböző komponensben vannak, és a komplementerben közöttük nyilván vezet él. Vegyünk most egy tetszőleges harmadik z csúcsot: ha x és y közül egyikkel az eredeti gráfban nincs összekötve, akkor a komplementerben mindenképp egy komponensben lesz x-szel és y-nal is. Mindkettővel nem lehetett összekötve, mert akkor x és y nem lett volna különböző komponensben. Ezek alapján a komplementer összefüggő (tetszőleges két csúcs között vezet út), viszont egy összefüggő gráf nem lehet izomorf egy nem összefüggővel, így az eredeti gráfnak összefüggőnek kellett lennie.

27. **[pótpótZH 2010. ősz] Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)|-|E(G)|$ komponense van.**
Tegyük fel, hogy a G gráfnak k komponense van, rendre $n_1, n_2, \ldots, n_k$ csúccsal. (2 pont)
Mindegyik komponens tartalmaz egy-egy feszítőfát, (2 pont)
és minden feszítőfának eggyel kevesebb éle van, mint az adott komponens mérete. (2 pont)
Ezek szerint G éleinek számára azt kapjuk, hogy $|E(G)| \geq n_1-1+n_2-1+\ldots+n_k-1 = n_1+n_2+\ldots+n_k-k = |V(G)|-k$. (3 pont)
Innen a feladat állítása közvetlenül adódik. (1 pont)

Persze másképp is érvelhetünk.

Ha G-nek egy élét elhagyjuk, attól legfeljebb eggyel nő a gráf komponenseinek száma. (3 pont)
Ha G minden élét elhagyjuk, akkor a komponensek száma az eredeti k-ról $|V(G)|$-re növekszik, hiszen minden pont izolált lesz. (3 pont)
Ezek szerint $k+|E(G)| \geq |V(G)|$, (3 pont)
és ebből átrendezéssel a feladat állítását kapjuk: $k \geq |V(G)|-|E(G)|$. (1 pont)

28. **Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1-e_1+e_2$ és $T_2-e_2+e_1$ is fa.**
Az e_2-nek a T_2 azon útján kell lenni, ami az e_1 két végpontját összeköti. Ráadásul olyan él kell, ami a T_1-e_1 két komponense között halad. Az adott út az egyik komponensből indul, a másikban ér véget, szóval biztos lesz ilyen él, és az jó is.