

SzA II. gyakorlat

Hányféleképp?

2012. szeptember 13.

1. Hányféleképpen lehet az ötös lottón (90 számból ötöt húznak ki) ötös, négyes, illetve hármas találatom? (Feltételezhetjük, hogy a lottószámokat már kihúzták.)
2. Van 4 halmazunk: A_1, A_2, A_3, A_4 . Mekkora $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$? Szita formula általánosan:

$$\left| \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

3. $(a + b)^5 = ?$
4. Egy dobozban 51 piros, 62 zöld és 30 sárga golyó van. Hányat kell (csukott szemmel) kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük
 - (a) legalább két különböző?
 - (b) legalább három piros?
 - (c) legalább két azonos?

5. Hány olyan tízjegyű szám van, melyben a második számjegy 5-ös?
6. Hány olyan tízjegyű szám van, melyben szerepel az 5-ös számjegy?
7. Hány olyan 10 hosszú 0-1 sorozat van, melyben legalább 8 darab egyes van?
8. Hány olyan négyjegyű szám van, melyben a jegyek szigorúan monoton növekvő sorrendben követik egymást?
9. Egy 12 fős társaságot egy szálloda két háromágyas és három kétágyas szobájában kell elszállásolni. Hány különböző szobabeosztás lehetséges, ha az azonos számú ágyat tartalmazó szobákat nem különböztetjük meg egymástól?
10. Hányféleképpen helyezhető el 20 különböző zászló 10 számozott zászlórúdra úgy, hogy egy rúdon tetszőlegesen sok zászló lehet (0 és 20 között), és az egyes rudakon a zászlók sorrendje nem számít?
11. **[ZH, 2009. október 19.]** (Eredetileg almák meg körték szerepeltek a feladatban, de egy kis aktualizálás sosem árt.) A qpa közeledtével nem engedhetjük, hogy a vegyészekre irányuljon a közfigyelem, ezért VIKes hallgatók egy csoportja elhatározza, hogy még jobban megdolgoztatja a TEK-et. Ehhez egyszerre két épületben kell megjelennie filmszereplőknek. 4 (megkülönböztethető) hallgató Darth Vadernek, míg 8 (szintén megkülönböztethető) hallgató Luke Skywalkernek öltözik. Hányféleképpen oszthatjuk szét őket két egyforma méretű csoportra úgy, hogy csoportonként legalább egy Luke Skywalker és Darth Vader is legyen?

12. [ZH, 2006.] A le- és felszállás meggyorsítása érdekében a Balkáni Közlekedési Társaság 20 napon keresztül, kísérleti jelleggel egy új, ajtó nélküli villamost közlekedtet. A villamos vezetésére egyelőre csak 15 dolgozónak van képesítése, azonban arra is vigyázni kell, hogy bármely négy egymást követő napon négy különböző dolgozó vezesse a kísérleti járművet. Hányféle lehet az említett 20 napon a kísérleti villamost vezetőik sorrendje?
13. Egy cirkuszban az állatidomár összesen 7 nagymacskát szeretne a porondra küldeni. A cirkusznak tigrisei, oroszlánjai és párducai vannak, mindből legalább 7 darab. Ha nem tudjuk megkülönböztetni az azonos fajú állatokat, akkor hányféle bevonulási sorrend közül választhat az idomár? És ha a sorrend nem számít?
14. Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyapakliból 4 lapot úgy, hogy legyen benne
- piros vagy ász?
 - piros és ász?
15. Hány olyan szám van 1 és 1000 között (zárt intervallum), ami nem relatív prím 105-höz?
16. Bizonyítsuk be, hogy a jelenlévők között van legalább 2, aki a hét ugyanazon napján született!
17. Bizonyítsuk be, hogy egy csoportban mindig van legalább két olyan ember, akik ugyanannyi embert ismernek a csoportból! (Az ismeretségek kölcsönösek.)
18. Igazoljuk, hogy öt darab, 10-nél nagyobb prím között lenni kell kettőnek, amik különbsége osztható 10-zel!
19. Bizonyítsuk be, hogy
- $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$
 - $$n \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n}{k+1} + k \binom{n}{k}$$