

SzA I. gyakorlat

Ismerkedés a tárggyal és egymással

2012. szeptember 6.

1. **Igaz-e a következő állítás: Minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak.**
Tfh nem igaz, vagyis „Nem minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak”. Ezt kicsit átrendezve: „Létezik olyan borg ebben a szobában, akinek nem piros fülei vannak”. Ez nyilván nem igaz, tehát az eredeti állítás igaz.
2. **Mi az alábbi állítások tagadása? (Két állítás akkor tagadása egymásnak, ha közülük minden esetben egy és csak egy igaz)**
 - (a) **Az osztályban minden tanuló lány.** Az osztályban van fiú.
 - (b) **Bergengóciában minden férfi gazdag vagy nincs felesége (vagy mindkettő).** Bergengóciában van szegény és házas férfi.
 - (c) **Az osztályban van olyan lány, aki magasabb, mint 170cm.** Az osztályban minden lány legfeljebb 170 cm magas.
 - (d) **Bergengóciában van olyan nő, aki gazdag és nincs gyereke.** Bergengóciában minden nő szegény vagy nincs gyereke.
3. **Fogalmazzuk meg az alábbi állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó!**
„Minden asszony életében van olyan pillanat, hogy szeretne olyat tenni, ami nem szabad.”
Van olyan asszony, aki egész életében olyat szeretne tenni, ami szabad.
4. **Van két állítás, p és q . Tudjuk, hogy ha p igaz, akkor q is igaz. Következik-e ebből, hogy ha q nem igaz, akkor p sem igaz?**
Tfh q nem igaz, és p igaz. Ha viszont p igaz, akkor q is igaz, ami viszont nem igaz, így ellentmondásra jutottunk. Tehát p nem lehet igaz.
5. **Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mondjuk meg minden alábbi állításra, hogy biztosan igaz, lehetséges, vagy biztosan hamis!**
 - (a) **Tudjuk valamiről, hogy nem hömpörő.** Azt állítom, hogy ez surjancs. Lehet, mert a nem hömpörőkről nem tudunk semmit.
 - (b) **Tudjuk valamiről, hogy hömpörő.** Azt állítom, hogy ez nem surjancs. Hamis, mert a feltételnek ellentmond.
 - (c) **Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs.** Azt állítom, hogy ez hömpörő. Hamis, lásd előző feladat.
 - (d) **Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs.** Azt állítom, hogy ez nem hömpörő. Igaz, lásd előző feladat.
 - (e) **Tudjuk valamiről, hogy surjancs.** Azt állítom, hogy ez nem hömpörő. Lehet, mert nem mond ellent a tudottaknak, de nem is következik belőlük.

6. Egy érettségi találkozón kiderül, hogy mindenkinek vannak gyerekei. Hogyan tudnánk megcáfolni az alábbi állításokat? Mondjuk meg, hogy milyen bizonyítékot kéne mutatni annak igazolására, hogy ezek az állítások nem igazak (lehetőleg ne használjuk a legfiatalabb, legidősebb szavakat)!
- (a) Mindenkinek a legidősebb gyereke 10 évnél idősebb. Egy olyan embert, akinek az összes gyereke legfeljebb 10 éves.
 - (b) Mindenkinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél idősebb. Egy legfeljebb 10 éves gyereket.
 - (c) Valakinek a legfiatalabb gyereke 10 évnél fiatalabb. Az összes gyerek legalább 10 éves (vagy minden ember minden gyereke legalább 10 éves).
-

7. Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$!

Tfh $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, azaz $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ úgy, hogy p és q relatív prím. Ekkor átalakításokkal:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$2q^2 = p^2$$

vagyis p^2 páros, így p is páros, vagyis $p = 2r$, és $p^2 = 4r^2$. Innen $q^2 = 2r^2$, vagyis q is páros, ami ellentmond annak, hogy p és q relatív prím.

8. Bizonyítsuk be, hogy fel tudunk menni egy végtelen lépcsőn!

Teljes indukcióval.

9. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

Teljes indukcióval.

10. Bizonyítsuk be, hogy az első n páratlan szám összege éppen n^2 ! Más-képp: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Teljes indukcióval.

11. Két kupac gyufánk van, és egy tetszőlegesen nagy gyufautánpótlásunk. A következőképp rakosgatjuk: az egyik kupacból elveszünk valamennyit, a másikba viszont kétszer annyit teszünk. Elérhető-e valamennyi rakosgatás után, hogy ugyanannyi szál gyufa legyen mindkét kupacban, ha eredetileg az egyikben 1, a másikban 2 szál volt?

Nem. Tfh elérhető, és a bal oldalról összesen x , a jobb oldalról összesen y gyufát vettünk el. Ekkor a gyufák száma a bal és jobb oldalon megegyezik, és így írható fel:

$$1 - x + 2y = 2 - y + 2x,$$

amiből

$$3(y - x) = 1,$$

ami nyilván lehetetlen.

12. Tekintsük a következő $P(n)$ állítást: egy n fantomból álló olyan csoport, amiben van egy skót fantom kizárólag skót fantomokat tartalmaz.

$P(1)$ triviálisan igaz.

Most tegyük fel, hogy $P(m)$ igaz valamilyen m -re. Legyen G egy $m+1$ fantomból álló csoport, amiben van egy skót fantom. Jelölje x ezt a skót fantomot. Ha x -hez hozzáveszünk G -ből $m-1$ másik fantomot, akkor az így kapott H csoport egy m fantomból álló csoport lesz, amiben van egy skót fantom. Mivel $P(m)$ igaz, így H -ban csak skót fantomok vannak. Legyen y az a fantom, akit kihagytunk H -ból. y és $m-1$ fantom H -ból egy olyan m tagú K fantomcsoportot alkot, amiben van legalább egy skót fantom, hiszen H -ban csak skót fantomok vannak, így az indukciós feltevést ismét használva biztosak lehetünk benne, hogy y is skót fantom, tehát G kizárólag skót fantomokból áll. **Hol a hiba?** (Ez a gondolatmenet kicsit más megfogalmazásban amúgy a lóparadoxon, lásd wikipedia.)

A 2 méretű halmaznál nem jó az indoklás, ezen bukik az egész indukció.

13. **Hányféleképpen ültethető le egy kör alakú asztal köré 6 ember? Az elforgatással egymásba vihető leültetéseket nem tekintjük különbözőknek.**

$6!/6$. Mondhatjuk azt, hogy ez a cirkuláris permutáció, és azért, de indokolhatjuk úgy is, hogy 1 embert rögzítünk (hozzá viszonyítunk), és az összes többi utána ültetjük le.

14. **Hányféleképpen ültethetünk le n házaspárt egy padra, ha a házastársak egymás mellé ülnek?**

$n! \cdot 2^n$, mert a házaspárokat egynek tekintjük, így n elem permutációja, az egyes házaspárok önmagukon belüli leültetési pedig n db független esemény, eseményenként 2 lehetőséggel.

15. **Hányféleképpen állhat fel 10 fiú és 5 lány egy sorba úgy, hogy két lány ne álljon egymás mellett?**

$10! \cdot 5! \cdot \binom{11}{5}$, mert külön sorbaállítjuk a lányokat és a fiúkat (ez egymástól független), majd a fiúk közötti helyekre beszurjuk az 5 lányt (11 helyből kell 5-öt választanunk).

16. **Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \dots, n$ számoknak, amelyekben a páros és páratlan számok felváltva követik egymást?**

Ha n páros, akkor $2 \cdot (n/2)! \cdot (n/2)!$, mert külön elrendezzük a párosokat és a páratlanokat, majd eldöntjük, hogy párossal vagy páratlannal kezdődjön a sorozat. Ha n páratlan, akkor mindenképpen páratlan számmal kell kezdeni a sorozatot, így az $(n-1)/2$ páros és $(n+1)/2$ páratlan szám külön-külön sorbarendezése után a közös sorrend már adott: $((n-1)/2)! \cdot ((n+1)/2)!$

17. **Hányféleképpen választhatunk ki a $\{-10, -9, -8, \dots, 10\}$ számok közül 4 különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül úgy, hogy a szorzatuk pozitív legyen?**

Vagy választunk 4 negatívot, vagy 4 pozitívot, vagy 2 negatívot és két pozitívot, így $\binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{2} \binom{10}{2}$.

18. A részvényt piacon 20 féle részvény érdekel minket, bármelyikből bármennyit vehetünk (a válság miatt mindegyik nagyon olcsó), és összesen 32 darabot szeretnénk venni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg? Ez egy ismétléses kombináció $n = 20$, $k = 32$ paraméterekkel, azaz $\binom{20+32-1}{32}$.
19. [ppZH, 2010.] A Cayley egyetem kombinatorika-kertészeti szakának első 3 félévében összesen 18 tárgyat kell elvégezni, minden félévben hatot. Az előtanulmányi rend szerint a *Fák* tárgyat a *Feszítőfák* tárgynál előbb kell felvenni, más megkötés nincs. Hányféleképp lehet felvenni a tárgyakat az egyes félévekben, feltéve, hogy minden felvett tárgyat már az adott félévben sikeresen teljesítenek a hallgatók?
 Ha tudjuk, hogy a „Fák” ill. a „Feszítőfák” tárgyat melyik két félévben veszi fel egy hallgató, akkor a nyilván az korábbi félévben kell felvennie az előbbi, a későbbiben pedig az utóbbi tárgyat. (1 pont)
 E két félévet $\binom{3}{2} = 3$ -féleképp választhatjuk. (2 pont)
 Ha már tudjuk, hogy melyik két félévről van szó, akkor a maradék 16 tárgyat kell a 3 félévre beosztani, úgy hogy arra a félévre, amikor a fenti tárgyak egyikét sem vette fel, 6 tárgy jusson, a „Fák”-at hallgatott félévre 5, a „Feszítőfák”-at tartalmazóra pedig szintén további 5 tárgy kerüljön. (3 pont)
 A 6 tárgy felvételére $\binom{16}{6}$ lehetőség van, a maradék tárgyakból az 5-öt $\binom{10}{5}$ -féleképp lehet kiválasztani, a megmaradó 5 tárgy pedig a feszítőfákkal együtt szerepel. (3 pont)
 A választásaink függetlenek, ezért a válasz $3 \cdot \binom{16}{6} \binom{10}{5} = 3 \cdot \frac{16!}{10! \cdot 6!} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 3 \cdot \frac{16!}{6! \cdot 5!^2}$. (1 pont)
20. [ZH, 2010. október 15.] A 15 fős képviselőtestület választásra 5 párt állít egy-egy 15 fős listát. A szavazást követően mindegyik párt a listája elejéről az elért eredményének megfelelő számú képviselőt küld a testületbe, úgy, hogy a testület összesen 15 fős legyen. Hányféle lehet a képviselőtestület a szavazás után?
 A képviselőtestület összetétele annyiféle lehet, ahányféleképp a 15 képviselői helyet el lehet osztani 5 párt között. (2 pont)
 Mind a 15 helyre 5 féle pártból lehet választani, a helyek sorrendje pedig nem számít, (2 pont)
 ezért 5 elem 15-öd osztályú ismétléses kombinációjáról van szó. (3 pont)
 Az órán tanultak szerint ilyenből $\binom{19}{15}$ van, és ez a válasz a feladat kérdésére is. (3 pont)