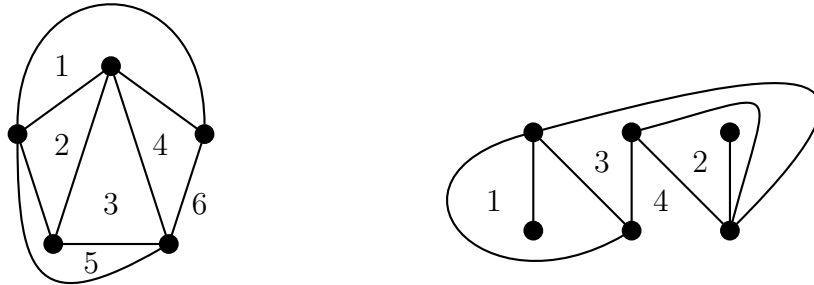


SzA XI. gyakorlat

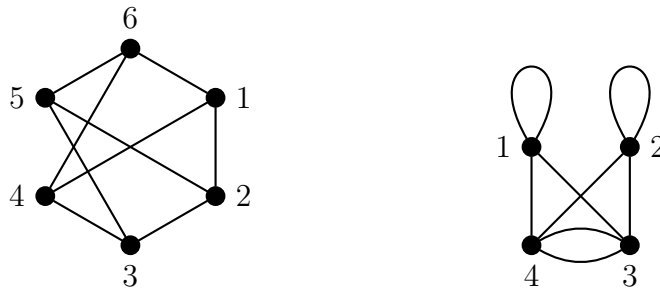
Dualitástól PERTig, hiszen hurrá, ZH!

2012. november 15.

1. Készítsük el az alábbi gráfok duálisát!



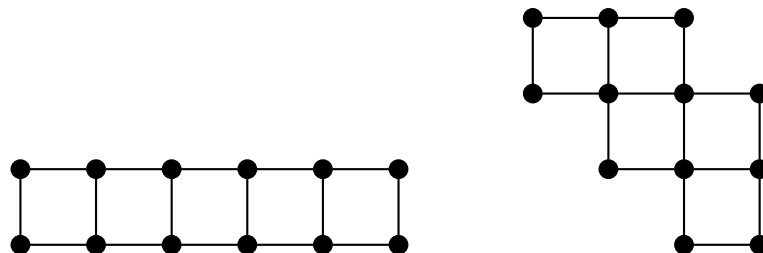
Az ábrán látható. Szorgalmasabbak eleve síkba is rajzolhatják őket.



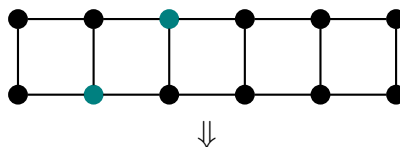
2. Legyen G egy 20 pontú, összefüggő, 3-reguláris síkgráf. Hány pontja van G duálisának, G^* -nak?

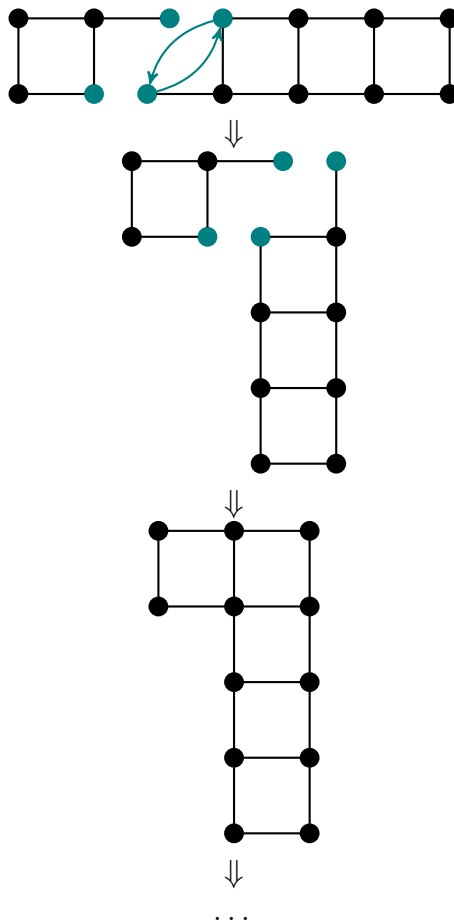
A duális pontjainak száma pont G tartományainak számával lesz egyenlő. Az Euler-formula, ami $n+t = e+2$ a feltételek alapján használható, továbbá a regularitás és a foksámösszegek képlete alapján $3n = 2e$. Innen kiszámolhatjuk, hogy $e = 30$ és $t = 12 = n^*$, ami a megoldás.

3. Gyengén izomorf-e az alábbi két gráf?



Igen, a Whitney-tételek alapján, a következő típusú lépéseket felhasználva egymásba vihető a kettő:

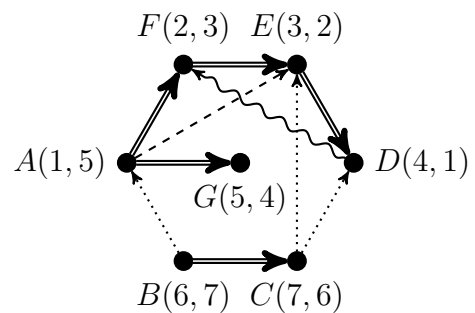




4. Végezzünk mélységi bejárást a következő gráfon A csúcsból indulva, és osztályozzuk az éleit!

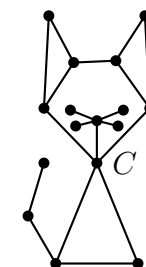
Lásd az ábrát. A számok (msz, bsz) formában vannak megadva.

- \Rightarrow faél
- \rightsquigarrow visszaél
- $\cdots\cdots\cdots\rightarrow$ előreél
- $\cdots\cdots\cdots\rightarrow$ keresztél



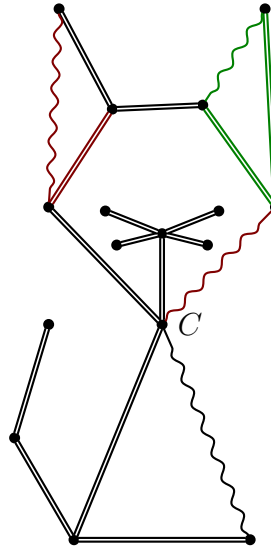
Megjegyzés: mikor elakadtunk, akkor véletlenszerűen választottunk egy még nem bejárt csúcsot, ahonnan folytattuk a bejárást. Az véletlen, hogy ebben a példában keresztélek csak a két fa között mennek, például ha lenne (G, F) élünk, az is keresztél lenne.

5. Határozzunk meg egy alapkörrendszert és fundamentális vágásrendszert a következő gráfban úgy, hogy a C pontból indulva készítünk egy mélységi feszítőfát!

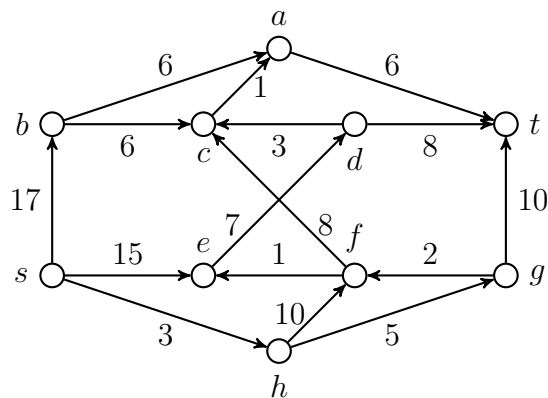


Egy lehetséges bejárás eredménye látható a következő ábrán. Minden egyes visszaél meghatároz egy alapkört, példaként zöldesen megjelölve egy. Az összes alpkör együtt alkotja az alapkörrendszert. Továbbá minden egyes faél meghatároz egy fundamentális vágást (azokkal a visszaélekkel együtt – ha esetleg vannak ilyenek –, akik az adott ágban „mellette”

futnak), példaként pirosasan megjelölve egy. Az összes fundamentális kör együtt alkotja a fundamentális vágásrendszert (ebben a példában egész sok fundamentális vágásunk van).



6. [ZH 2011. november 24.] Határozzuk meg az ábrán látható PERT probléma legrövidebb végrehajtási idejét, és állapítsuk meg, mik a kritikus tevékenységek!

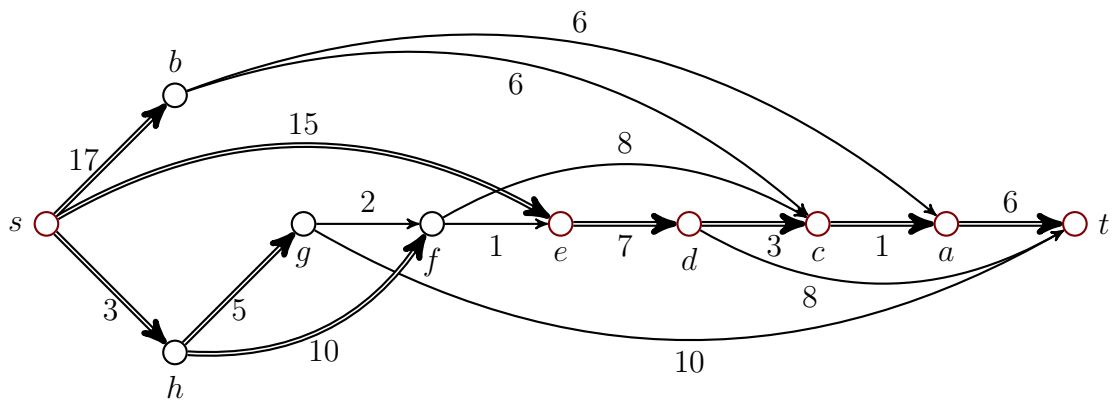


Az órán tanult módszerrel dolgozunk. Először meghatározzuk G egy topologikus sorrendjét (emeletekre bontással vagy mélységi bejárással, ahogy jólesik). Lásd az ábrát. (2 pont)

Ezt követően a csúcsokat ebben a sorrendben dolgozzuk fel, azaz meghatározzuk a legkorábbi kezdési időt, és azt az élt (vagy éleket), ami ezt okozza. Az eredmény az ábrán látható. (5 pont)

Ezek szerint a legrövidebb végrehajtási idő $t = 32$, (1 pont)

és mivel egyetlen kritikus út vezet s -ből t -be, a kritikus tevékenységek ezen út csúcsai, azaz s, e, d, c, a, t . (2 pont)



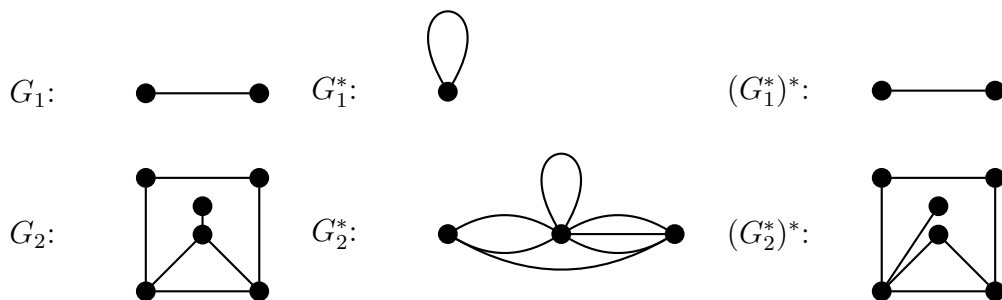
s	b	h	g	f	e	d	c	a	t
0	17	3	8	13	15	22	25	26	32

7. **Rajzoltam egy n csúcsú fát, de elveszítettem. Rajzoljuk le a duálisát!**

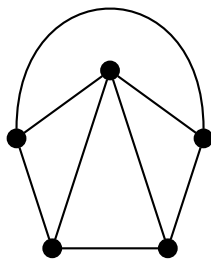
Egy pont, $n - 1$ hurokélel. Ez azért van így, mert a fában nincs kör, tehát egy tartománya van, továbbá az $n - 1$ él mindegyike ezen egy tartomány között fut.

8. **Adjunk meg egy olyan G_1 és G_2 gráfokat, hogy adott lerajzolás szerint $G_1 \cong (G_1^*)^*$ és $G_2 \not\cong (G_2^*)^*$!**

Sokfélélet lehet rajzolni mindkettőből, két egyszerű példa:



9. **Mutassunk egy olyan egyszerű G gráfot, melynek 5 pontja van, és izomorf a duálisával!**



10. **[ZH 2008. november 17] Határozzuk meg mindazon egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható G gráfokat, amiknek létezik olyan G^* duálisuk, hogy $G \cong G^*$ teljesül, továbbá $e = n + 2$ áll, ahol e a G éleinek, n pedig G csúcsainak számát jelöli.**

Az izomorfia miatt $n^* = n$, a duális definíciója miatt pedig $n^* = t$, tehát az Euler-formula, az előzőek, és a feltétel alapján $n + t = e + 2 = n + n = n + 2 + 2$, ahonnan $n = 4$ és $e = 6$. Mivel egyszerű gráfról van szó, ezért nem lehetnek többszörös- és hurokélek, a K_4 -nek pedig pont 6 éle van, így ha létezik ilyen gráf, akkor az csak a K_4 lehet. K_4 -et síkbarajzolva és elkészítve a duálisát láthatjuk, hogy jé, tényleg izomorfak.

11. [ZH 2009. november 23.] Egy 12 csúcsú konvex poliédernek 10 lapja van. Hány oldala van az egyes lapoknak, ha tudjuk, hogy ez a szám minden lapra azonos? A konvex poliéder élhálója pont egy síkbarajzolható gráfnak felel meg. Ennek a gráfnak a duálisában a pontok fokszáma viszont pont a nekik megfelelő lapok oldalszámával egyezik meg. Azaz: $n = 12$, $t = n^* = 10$, $e^* = e = n + t - 2 = 20$, $\sum d^* = 2e^*$, $\sum d^* = n^*d^*$, fentieket rendezve, kiszámolva a $d^* = 4$, vagyis a keresett szám 4.

12. [PZH 2008. december 5] Tegyük fel, hogy G olyan síkbarajzolható, egyszerű gráf, amibe nem tudunk további élt húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával. Igazoljuk, hogy ha G^* a G duálisa, akkor G^* 3-reguláris.

Ha a duálisban van másod- vagy elsőfokú pont, akkor az eredeti gráf nem egyszerű (másodfokú: párhuzamos élek, elsőfokú: hurokél). Ha van 3-nál magasabb d fokú pont, akkor viszont az ehhez tartozó pont olyan tartománynak felel meg, amit d él határol. Ebbe viszont legalább egy élet be tudunk húzni az egyszerűség és síkbarajzolhatóság megtartásával, ami ellentmond a feltételnek. Tehát csak harmadfokú pontjaink lehetnek, azaz 3-reguláris a gráf.

13. [PPZH 2010. ősz] Bizonyítsuk be, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor G bármely G^* duálisának van olyan tartománya, amit legfeljebb 5 él határol. Tanították, hogy ha G egyszerű, síkbarajzolható és csúcsainak száma $n \geq 3$, akkor G -nek legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (2 pont)

Ha G -nek legfeljebb 2 csúcsa van, akkor éleinek száma legfeljebb egy, ugyanennyi éle van tehát G^* -nak is, ezért G^* bármely lapjának határa legfeljebb két élből áll. (Hiszen az egyetlen él mindkét oldala határolja ugyanazt a lapot.) (1 pont)

Ha pedig G -nek legalább 3 csúcsa van, akkor a G -beli csúcsok fokszámösszege az élszám kétszerese, tehát legfeljebb $6n - 12$. (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy G -nek van olyan csúcsa, ami legfeljebb ötödfokú, hiszen ha minden csúcsnak legalább 6 lenne a foka, akkor a fokszámösszeg legalább $6n$ lenne. (2 pont)

Legyen v ilyen, legfeljebb 5-ödfokú csúcs G -ben. A v csúcs a G^* valamelyik tartományának belsejében van. Az ezen tartomány határoló G^* -beli élek éppen a v -ből induló G -beli éleknek felelnek meg, (3 pont)

ezért ezt a tartományt legfeljebb 5 él határolja, mi pedig éppen egy ilyen létezését akartuk igazolni. (2 pont)

Ha vki azt hivatkozta, hogy minden egyszerű sr gráfnak van legfeljebb 5-ödfokú csúcsa, azért is jár az 5 pont. Ha a $3n - 6$ -os felső becslés alapján jutunk erre, akkor ahogy el kell intézni a legfeljebb 2 csúcsú gráfokat.

14. G egy összefüggő, irányított gráf, melynek van olyan mélységi bejárása, amelynek során keletkezett feszítőerdő csupa izolált pontból áll. Az ilyen n pontú gráfok közül hogy néz ki a minimális, illetve a maximális élszámú?

Összefüggőség miatt fánál kevesebb él nem jöhet szóba, az $n - 1$ hosszú út (a bejárás során „visszafelé” haladva) pont jó. A maximális élszámúhoz meg kell gondolni, hogy DAG-nak kell lennie (irányított kör elrontaná az izoláltságot minden bejárásnál, ugyanis lenne visszaél, lásd tétel), tehát írjuk fel a topológikus sorrendben a pontokat, és ha minden lehetséges előre-fele mutató élet behúzzunk (azaz az i csúcsból vezet irányított él minden $i + 1 \dots n$ csúcsba), akkor még pont jók vagyunk, többet a minden lehetségesnél meg nem tudunk behúzni.

15. [PZH 2010. ősz] Legyenek az F fa csúcsai az v_1, v_2, \dots, v_{10} , élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \leq i \leq 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \leq j \leq 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű, irányítatlan gráf v_1 -ből indított mélységi (DFS) bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G -nek?

Tanították, hogy a mélységi bejárás fájához nem tartoznak keresztélek (megjegyzés, DM:

irányítatlan gráf!), azaz olyan élek, amik a fa olyan csúcsait kötik össze, amik nem leszár-
mazottai egymásnak. (3 pont)

Ezek szerint G -ben nem futhat él a v_6, v_7, \dots, v_{10} pontok között. (2 pont)

A G gráfnak tehát nem lehet több éle, mint annak a gráfnak, amit 10 pontú teljes gráfból
úgy kapunk, hogy elhagyjuk a fenti 5 pont közt futó éleket. (2 pont)

Az élszám tehát legfeljebb $\binom{10}{2} - \binom{5}{2} = 45 - 10 = 35$ lehet. (1 pont)

Ennyi éle pedig lehet is G -nek. Ha ugyanis G pontosan a fent leírt gráf, akkor a megadott
 F lehet a G mélységi fája. (2 pont)

A fa helyes lerajzolásáért adjunk 1 pontot, ha nincs más értékelhető teljesítmény.

16. **G síkbarajzolható és van Euler-köre. Bizonyítsuk be, hogy G^* páros gráf!**

Tfh G^* nem páros, ami az ismert tétel alapján azt jelenti, hogy van páratlan hosszú köre. Ez
a kör G -ben egy vágásnak felel meg (a duális tulajdonságai miatt), ami szintén páratlan sok
élből áll. Ez viszont lehetetlen, hiszen az Euler-kör ebben az esetben páratlanszor közlekedne
a vágás által meghatározott két rész között, pedig párosszor kell neki. Vagyis G^* páros.