

SzA X. gyakorlat

Színezünk és rajzolunk

2012. november 8.

1. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:

C_4 , C_5 , $K_{2,4}$, alábbi 2 gráf



$\chi(C_4) = 2$, páros hosszú kör kromatikus száma mindig 2. $\chi(C_5) = 3$, mert páratlan kör. $\chi(K_{2,4}) = 2$, mert minden páros gráf kromatikus száma 2. A bal oldali gráfban $\omega(G) = 4$, tehát $\chi(G) \geq 4$, viszont egy 4 színnel színezést tudunk is mutatni. A jobb oldali gráfban $\chi(G) = 4$, mert bár az alsó korlát 3, a külső csúcsoknak különböző színűeknek kell lenniük, és ha ezeket kiszínezzük, és tovább folytatjuk az egyértelműen kiszínezhető csúcsok színezését, akkor a középső csúcsnak muszáj bevezetni egy negyedik színt (vagyis egy olyan feltételezés esetén, hogy 3 színnel színezhető lenne, ellentmondásra jutunk).

2. Mennyi a következő két gráf élkromatikus száma?



A bal oldaliban $\Delta(G) = 4$, és egy 4 színnel való jó színezés szerepel is az ábrán. A jobb oldali gráfot ha megpróbáljuk 3 színnel kiszínezni, akkor a külső kör csak egyféle lehet (a forgatásokat és színpermutációkat leszámítva), ebből a külső kört a belsővel összekötő élek színei adódnak, és ahol a sárgát be kellett vezetni, ott nem lehetett már semelyik eredeti színt használni. Így ez csak 4 színnel élszínezhető.

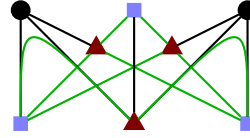
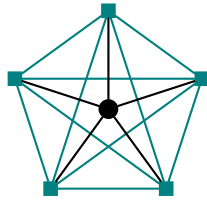
3. Legyen G 100-reguláris gráf 2001 ponton. Határozzuk meg $\chi_e(G)$ értékét!

Tfh $\chi_e(G) = \Delta(G) = 100$. Ekkor mivel reguláris a gráf, minden csúcsnál meg kell jelennie mind a 100 színnek. Ekkor pl. a piros élek viszont pont egy teljes párosítást alkotnának, ami a csúcsok páratlan száma miatt lehetetlen, tehát $\chi_e(G) = \Delta(G) + 1 = 101$ (Vizing-tétel!).

4. Mycielski-konstrukciót használva rajzoljunk olyan M_k gráfokat, ahol $\omega(M_k) = 2$, $\chi(M_k) = k$, $k = \{2, 3, 4\}$! De tényleg, a szabályt használva, gyakorlás miatt!

Lécci-lécci!

5. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



Nem, a bal oldalon egy K_5 bújik meg, a jobb oldalon pedig egy $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf gráf, az ábra szerint.

6. **Hány csúcsa van egy összefüggő, 4-reguláris síkgráfnak, ha síkbarajzolásakor 10 tartomány keletkezik?**

Az Euler-formula ($n + t = e + 2$) és az ismert $\sum d_i = 2e$ képlet alapján $n = 8$.

7. **Mutassuk meg, hogy egy síkbarajzolható egyszerű gráfban nem lehet minden pont foka legalább 6!**

Síkbarajzolható egyszerű gráfok esetén $e \leq 3n - 6$, és ebben az esetben $n\delta(G) \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2e$, de tudjuk, hogy $\delta(G) = 6$, tehát $e \geq 3n$, ami ellentmondás.

Rossz gondolat, ha esetleg K_6 létét szeretnénk bizonyítani... Elég ezoterikus, de ami ennél is rosszabb: helytelen bizonyítás jönne ki belőle. Gondoljunk csak a $K_{6,6}$ -ra.

8. **G csúcsai egy sakktábla mezői. Két mező szomszédos G -ben, ha egymásból bástyával egy lépésben elérhetők. Mennyi G kromatikus száma?**

Az egy sorhoz (vagy oszlophoz) tartozó csúcsok K_8 -at alkotnak, tehát biztos, hogy $\chi(G) \geq 8$. 8 szín viszont elég is, az alábbi egy jó színezés:

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
				⋮			
2	3	4	5	6	7	8	1

9. [pZH 2008. december 5.] **Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges 3-kromatikus, 100 csúcsú G gráfnak van 67 olyan csúcsa, amik páros gráfot feszítenek.**

Legyen a zöld szín az, amelyikből a legkevesebb van. Ha elhagyjuk a zöld pontokat, akkor a maradék gráf két színnel színezhető, tehát páros. A skatulya elvet felhasználva zöldből legfeljebb 33 lehet, tehát a maradék páros gráfnak legalább $100 - 33 = 67$ csúcsa van.

10. [pZH 2011. december 1.] **Tegyük fel, hogy 77 iskolás levelez egymással úgy, hogy mindegyiküknek pontosan 8 levelezőpartnere van. Megvalósítható-e, hogy a levelezéshez 8-féle színű borítékot használnak úgy, hogy mindenki különböző színű borítékot használjon az egyes levelezőpartnereihez, és bármely két levelezőtárs között mindkét irányú levélforgalomhoz azonos színű borítékot használjanak?**

Legyenek a $G = (V, E)$ gráf csúcsai az iskolások, él pedig akkor fusson a két csúcs között, ha az adott iskolások leveleznek. A feladat feltételeiből G -nek 77 csúcsa van és 8-reguláris. A borítékokra a feladatban megkívánt feltétel pedig pontosan G 8-élszínezhetőségét jelenti, a célunk tehát ennek eldöntése. (3 pont)

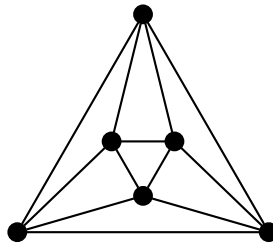
Tegyük fel indirekt, hogy G 8-élszínezhető. Ekkor az azonos színű élek G egy párosítását alkotják. (2 pont)

Mivel 8 színt használtunk, és minden csúcsból 8 féle színű él indul, ezért az azonos színű élek teljes párosítást alkotnak minden egyes szín esetén. (3 pont)

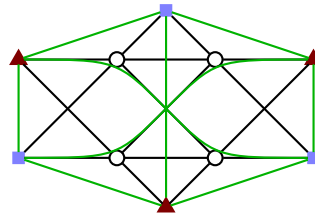
Azonban G -nek 77 csúcsa lévén nem létezik teljes párosítása, az indirekt feltevésünk tehát nem helytálló, G élei nem színezhetők 8 színnel, a borítékokra a feladatban megkívánt elvárás nem teljesíthető. (2 pont)

11. [ZH 2009. november 23.] A G gráfot úgy kaptuk, hogy a 6 pontú teljes gráfból elhagytunk három független (vagyis pontdiszjunkt) élt. Síkbarajzolható-e ez a G gráf? (Ha igen, rajzoljuk le keresztezés nélkül, csupa egyenes szakasszal, ha nem, akkor bizonyítsuk ezt be!)

Magyarul: egy K_6 -ból elhagytunk egy teljes párosítást. Mindenféle szimmetriáokból ezt csak egyféleképpen tehetjük meg. A keletkezett gráfban $e = 15 - 3 = 12$. Síkbarajzolható (ezt megtippeltük), akinek segít, $t-t$ is kiszámolhatja az Euler-formulával. Egy megoldás pl:

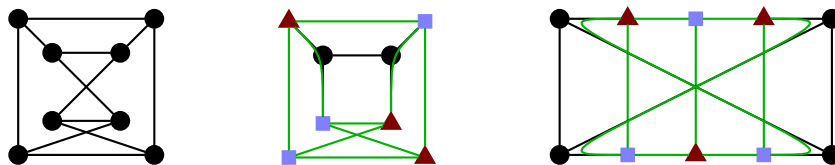


12. [pZH 2011. december 1.] Síkbarajzolható-e az ábrán látható gráf?

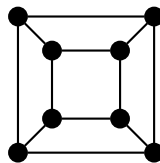


A megjelölt csúcsok és élek által alkotott élek $K_{3,3}$ egy soros bővítését mutatják. (8 pont) Tanultuk, hogy $K_{3,3}$ nem síkbarajzolható, így annak soros bővítése sem az, tehát a feladatban szereplő gráf sem síkbarajzolható. (2 pont)

13. Síkbarajzolhatók-e az alábbi gráfok?



A bal oldali igen, lásd alább egy konkrét síkbarajzolását. A jobb oldaliak nem, az előző feladat indoklása alapján.



14. Egy nemzetközi konferencián 5 ország egy-egy képviselője ül asztalhoz. Bizonyítsuk be, hogy van köztük kettő, akiknek az országa nem szomszédos! (Feltételezhetjük, hogy a világ nem tórusz alakú, valamint nincsenek exklávék.)

Feleltessünk meg egy gráfban minden országnak egy csúcsot, és akkor legyen összekötve két csúcs, ha a két ország szomszédos egymással. Ennek a gráfnak síkbarajzolhatónak kell lennie. Ha viszont mindenki szomszédos lenne mindenkivel, akkor a gráf nem lenne síkbarajzolható, mert K_5 lenne.

15. **[ZH 2011. november 24.]** Tegyük fel, hogy G olyan gráf, amire $\Delta(G) \leq 3$ és G -nek legfeljebb 5 harmadfokú csúcsa van. Bizonyítsuk be, hogy G síkbarajzolható.

Az órán szerepelt Kuratowski tételt fogjuk felhasználni, ami szerint ha egy G gráf nem síkbarajzolható, akkor tartalmaz $K_{3,3}$ -mal vagy K_5 -tel topologikusan izomorf részgráfot. (3 pont)

Márpedig ha egy gráf $K_{3,3}$ -mal topologikusan izomorf, akkor annak pontosan 6 harmadfokú csúcsa van, így G -nek is legalább hat legalább harmadfokú csúcsának kell lennie, hogy ilyen részgráfja lehessen. (3 pont)

Ha pedig egy gráf K_5 -tel topologikusan izomorf, akkor pontosan 5 negyedfokú csúcsa van, ezért ha G ilyen részgráfot tartalmaz, akkor $\Delta(G) \geq 4$ teljesül. (3 pont)

A feladatban szereplő G gráfra mindkét fenti eset elképzelhetetlen, ezért G a Kuratowski tétel miatt bizonyosan síkbarajzolható. (1 pont)

16. **[ppZH 2011. december 14.]** Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 11 csúcsa van és síkbarajzolható. Igazoljuk, hogy a \bar{G} komplementergráf nem síkbarajzolható.

Tanították, hogy egy n csúcsú, egyszerű, sr gráfnak $n > 3$ esetén legfeljebb $3n - 6$ éle lehet. (3 pont)

Jelen esetben ez azt jelenti, hogy G -nek legfeljebb $3 \cdot 11 - 6 = 27$ éle lehet. (3 pont)

Ezért aztán \bar{G} élszáma legalább $\binom{11}{2} - 27 = 55 - 27 = 28$ lesz, (3 pont)

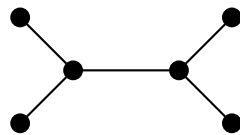
tehát az elsőnek idézett ok miatt \bar{G} nem síkbarajzolható. (1 pont)

17. Jelölje M_k a Mycielski-konstrukcióval kapott azon gráfot, melynek kromatikus száma k . Milyen k értékekre tartalmaz M_k Euler-kört?

$k = 2$ -re biztos nem, ugyanis 2 csúcs és egy él van ebben a gráfban. M_3 megegyezik C_5 -tel, így van benne Euler-kör. Innentől kezdve a k -edik lépésben az egyik csúcs fokszáma pont M_{k-1} csúcsainak számával fog megegyezni, viszont ez minden esetben páratlan, hiszen $n_\kappa = 2n_{\kappa-1} + 1$, vagyis $\kappa \geq 3$ esetén páratlan csúcsa van M_κ -nak. Így az egyetlen megoldás $k = 3$.

18. Igaz-e, hogy minden egyszerű G gráfnak van olyan $\chi(G)$ színnel való színezése, melyben az egyik színosztály pontosan $\alpha(G)$ csúcsot tartalmaz?

Nem, egy ellenpélda lehet a következő, ahol a 4 elsőfokú csúcsot (amik a maximális független ponthalmazt alkotják) azonos színűre színezve a gráfot nem lehet két színnel színezni, pedig a kromatikus száma 2.



19. Legyen G egy egyszerű gráf, amire $\chi(G) = k$. Tekintsük G -nek egy k színnel való színezését, ebben legyen az egyik felhasznált szín a piros. Bizonyítsuk be, hogy a megadott színezésben biztosan van olyan piros színű pont, aminek szomszéd-ságában az összes felhasznált, pirostól különböző szín előfordul!

Tfh nincs ilyen piros pont. Ekkor egy tetszőleges piros pontot mindig át tudunk színezni olyan színűre, ami hiányzik a szomszédai közül. Ha ezt az összes piros pontra megcsináljuk, akkor szintén egy jó színezést kapunk, viszont így $\chi(G) = k - 1$ lenne, ami ellentmondás.

20. Legyen G egy 3-reguláris gráf, amire $\chi_e(G) = 3$. Tudjuk továbbá, hogy G éleinek (a színek egymás közötti permutációjától eltekintve) egyetlen jó három színnel való színezése létezik. Van-e G -ben Hamilton-kör?

Vegyük ezt a jó színezést, és hagyjuk el belőle a zöld éleket! Mivel minden csúcs foka 3 volt, minden csúcsához tartozott egy zöld él is. A maradék gráfunk 2-reguláris lesz, tehát körök uniója lehet csak. Tfh több ilyen körünk van! A mostani színezésben piros és kék élk váltogatják egymást. Az egyik körben cseréljük ki az élk színét! Az eredeti gráfot visszaállítva továbbra is jó színezésünk lesz, viszont ez az eredetitől eltérő lesz, ami ellentmond a feltételeknek, vagyis a zöld élk elhagyásával pont egy Hamilton-kört kapunk.

21. \textcircled{B} Legyen G olyan (irányítatlan) gráf, melynek kromatikus száma k . Bizonyítsuk be, hogy ekkor G élei irányíthatók úgy, hogy a leghosszabb irányított út legfeljebb k pontot tartalmazzon!

A színeknek definiáljuk egy sorrendjét! Ez lehet pl. a színek indexe. Vegyük a gráf k -színnel való színezését, majd irányítsuk úgy az éleket, hogy mindig a kisebb sorszámúból a nagyobb sorszámúval színezett csúcsba mutasson! Egyenlőség a jó színezés miatt nem állhat elő. Ebben az esetben minden, a gráfban lévő irányított útban a csúcsok színei folyamatosan növekednek, így mivel legfeljebb k színt használhatunk, egy irányított út is legfeljebb k hosszú lehet.

22. \textcircled{B} Bizonyítsuk be, hogy egy n csúcsú, e élű reguláris G gráfra fennáll, hogy $\chi(G) \leq 1 + 2e/n$!

Tudjuk, hogy $\chi(G) \leq \Delta + 1$. Egy reguláris gráfban minden fokszám megegyezik, vagyis $n\Delta = 2e$, amiből $\Delta = 2e/n$, ezt pedig behelyettesítve megkapjuk a kívánt állítást.