SzA VIII. gyakorlat

Görög betűk, és kicsit elkezdünk színezni is

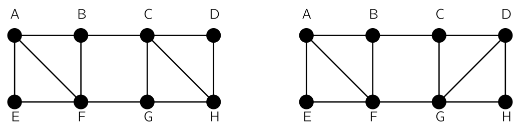
2011. október 25.

Hasznos tudnivalók

- $\alpha(G)$: független csúcsok maximális száma G-ben
- $\nu(G)$: független élek maximális száma G-ben (maximális párosítás)
- $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma G-ben (csak akkor értelmezett, ha nincs izolált pont)
- $\tau(G)$: lefogó csúcsok minimális száma G-ben
- $\alpha(G) \leq \rho(G)$, $\nu(G) \leq \tau(G)$
- Gallai: $\alpha(G) + \tau(G) = n$, valamint ha nincs izolált pont, akkor $\nu(G) + \rho(G) = n$
- König: páros gráfokra! $\nu(G) = \tau(G)$; $\alpha(G) = \rho(G)$, ha nincs izolált pont
- Tutte: $G(V, E)$ gráfban $\exists$ teljes párosítás $\Leftrightarrow$ G-ből elhagyva tetszőleges $S \subseteq V$ pontokat a keletkező gráf páratlan csúcsú komponenseinek száma nem nagyobb $|S|$-nél.

Feladatok

1. Adjunk meg maximális független élhalmazt és minimális lefogó ponthalmazt a következő gráfokban!



2. Határozzuk meg $\alpha(G), \tau(G), \nu(G), \rho(G)$ értékét a $G = K_{n,m}$ teljes páros gráfra!
3. A 2000 csúcsú G gráfban $\tau(G) = 678$. Igazoljuk, hogy G-ben nincs teljes párosítás!
4. Mutassuk meg, hogy ha az n pontú G gráfban nincs hurokél és $\tau(G) = n - 1$, akkor $G = K_n$!

---

5. **[pótpótZH 2010. ősz]** Mutassunk olyan 10 pontú összefüggő, egyszerű G gráfot, amihez úgy lehet egy élt hozzáadni az egyszerűség megtartásával, hogy a $\nu(G)$ és a $\rho(G)$ értéke is megváltozik ennek hatására.
6. A $V = \{2, 3, \ldots, 2007\}$ ponthalmazon definiáljuk a $G(V, E)$ gráfot úgy, hogy $(x, y) \in E \Leftrightarrow x \nmid y \wedge y \nmid x$ ($a \nmid b$: a nem osztója b-nek)! Van-e G-ben teljes párosítás?
7. Igazoljuk, hogy az n pontú G páros gráfban $\alpha(G) \geq n/2$!

8. **[ZH 2009. október 19.]** Legyen G az a gráf, mely hét darab egyenként 287 pontú teljes gráf pontdiszjunk egyesítése. Határozzuk meg az $\alpha(G), \tau(G), \rho(G), \nu(G)$ értékeket!

9. **[pótZH 2009. november 17.]** Legyenek a G páros gráf színosztályai A és B, és tegyük fel, hogy legfeljebb $|B|$ él szükséges G összes pontjának lefogásához. Igazoljuk, hogy ekkor az A színosztályra teljesül a Hall feltéltel.

10. Tegyük fel, hogy a G gráf minden összefüggő komponense egy kör. Mi az a legkisebb m szám, amire teljesül, hogy G-hez hozzá lehet venni m (megfelelően választott) élet úgy, hogy az új gráfban legyen teljes párosítás? Mikor létezik ilyen m szám?

11. A G gráfnak $2n$ pontja van és tudjuk, hogy minden pont foka legalább n. Határozzuk meg $\nu(G)$ és $\rho(G)$ értékét!

12. Legyen egy $2n$ csúcsú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább n. Mutassuk meg, hogy $\tau(G) \geq n$!

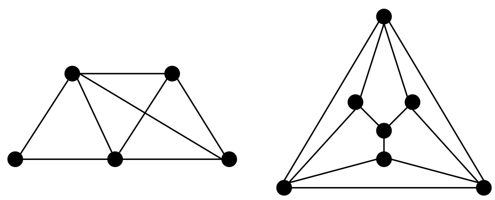
13. Egy G összefüggő gráf olyan, hogy tetszőleges pontját elhagyva a maradék gráfban létezik teljes párosítás. Bizonyítsuk be, hogy G-ben nincs elvágó él! (Egy él elvágó, hogyha az élet elhagyva megszűnik a gráf összefüggősége.)

14. Bizonyítsuk be, hogy $\Delta(G)\tau(G) \geq |E|$! $\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszáma.

15. Bizonyítsuk be, hogy egy háromszög- és hurokmentes G gráfban $\alpha(G)\tau(G) \geq |E|$!

---

16. Mennyi a következő gráfok kromatikus száma:
C_4, C_5, $K_{2,4}$, alábbi 2 gráf



17. Mennyi a következő két gráf élkromatikus száma?