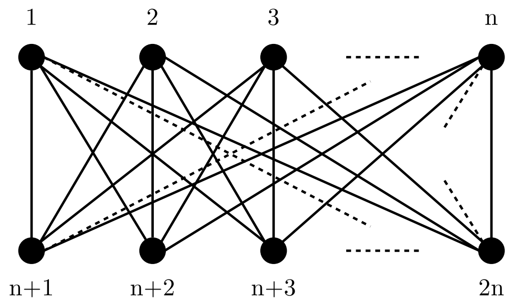
SzA VII. gyakorlat

Sok az összefüggés, valamint páros gráfok

2011. október 18.

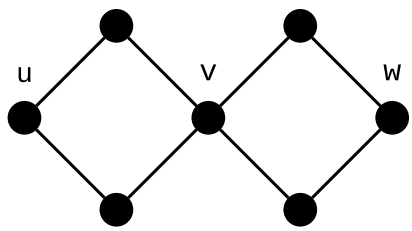
1. **Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre a következő, $2n$ csúcsú gráf ($K_{n,n}$, teljes páros gráf) k-szorosan összefüggő!**



Ha elhagyunk egy teljes pontosztályt (n pontot), akkor a gráf nem lesz összefüggő, tehát $k \leq n$. Ha viszont úgy hagyunk el valahány csúcsot, hogy az alsó és felső pontosztályban is marad, akkor a gráf összefüggő marad. Tehát legfeljebb $n-1$ csúcsot elhagyva mindkét pontosztályban mindenképp marad pont, így a gráf összefüggő marad, tehát $k \geq n$. A fentiekből $k = n$.

2. **Igaz-e, hogy ha a G gráfban van k db éldiszjunkt út u-ból v-be, és v-ből w-be is, akkor van k db éldiszjunkt út u-ból w-be is?**
Igaz, mert: tfh nincs, azaz legfeljebb $k-1$ él éldiszjunkt út megy u-ból w-be. Ekkor ezeket az utakat $k-1$ él biztos lefogja (Menger), ezen élek elhagyásával a gráf szétesik, és u és w külön komponensbe kerül. v vagy az egyik, vagy a másik komponensben lesz (legyen mondjuk w komponensében, a másik eset ugyanez pepitában), azaz $k-1$ él elhagyásával az u és v közötti utakat lefogtuk. Ebből következik, hogy u és v között legfeljebb $k-1$ éldiszjunkt út mehet (Menger ismét), de ez ellentmond a feltevésnek.

3. **Igaz-e, hogy ha a G gráfban van k db pontdiszjunkt út u-ból v-be, és v-ből w-be is, akkor van k db pontdiszjunkt út u-ból w-be is?**
Nem, ellenpélda ($k = 2$):

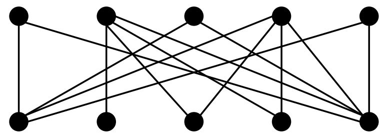


4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf k-szorosan pontösszefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is!

5. **[ZH 2008. október 10.] Tegyük fel, hogy a G gráf k-szorosan élösszefüggő, F a G egy feszítőfája és e az F egy éle. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfnak legalább $k-1$ olyan, e-től különböző f éle van, amire igaz,**

hogy F-ből e-t törölve és f-et behúzva G egy feszítőfáját kapjuk.
k-éöf-ből következik, hogy tetszőleges két csúcs között legalább k élidegen út megy. Vegyük e két végpontját (i és j), közöttük e-n kívül még legalább $k-1$ éldiszjunkt út megy. Egy ilyen e-től éldiszjunkt utat megnézve biztos van benne olyan f él, ami nincs benne F-ben, hiszen ha nem lenne, akkor kör lenne F-ben. Tehát e és f kicserélhető, ez viszont igaz mind a $k-1$ darab e-től éldiszjunkt útra.

6. **Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!**



Teljes párosítás nem lehet a gráfban, hiszen az alsó csúcsok közül a középső háromnak összesen két szomszédja van, tehát sérül a Hall-feltétel. Eggyel kisebb, 4 méretű párosítást tudunk mutatni (pl. a „függőleges” élek), így ezek maximális párosítást alkotnak.

7. **Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!**
Válasszunk ki t fiút! Ha $t \leq 6$, akkor már egyiküknek is legalább 6 lányismerőse van. Ha $t \geq 7$, akkor tfh összesen kevesebb, mint t lányt ismernek. Ekkor egy olyan lány fiúismerőseinek száma, akit egyikőjük sem ismer: $12 - t \leq 5$, ami ellentmond a feltételnek. Ezek alapján tetszőleges t fiúnak összesen legalább t lányismerőse van, tehát tudunk adni egy teljes párosítást (Frobenius-tétel).

---

8. **[ZH 2010. október 15.] Tegyük fel, hogy a G gráf 3-szorosan élösszefüggő és létezik Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy G 4-szeresen élösszefüggő.**
A G gráf 3-élöf, ezért legfeljebb két élét elhagyva mindenképp összefüggő marad. (2 pont)
Mivel G-nek van Euler-körsétája, a tanultak szerint G minden csúcsának páros a fokszáma. (2 pont)
Azt kell igazolnunk, hogy G 4-élöf, azaz bárhogyan is hagyunk el G-ből legfeljebb 3 élt, G-nek összefüggőnek kell maradnia. (2 pont)
Tegyük fel indirekt, hogy ez nem így van, ami azt jelenti, hogy valahogyan elhagyható G-ből 3 él úgy, hogy G ettől szétessen. (1 pont)
Ha az ekkor keletkező komponensek egyikében a csúcsokat egy ponttá húzzuk össze, akkor olyan gráfot kapunk, amiben minden csúcs foka páros, kivéve az összehúzott csúcsét, aminek 3 a foka. (2 pont)
Ez azonban lehetetlen, hiszen tanultuk, hogy a fokszámösszeg minden véges gráfban páros, így a páratlan fokú csúcsok száma semmiképp sem lehet pontosan egy. A kapott ellentmondás a feladat állításának helyességét bizonyítja. (1 pont)

9. **[pótpótZH 2010. ősz] Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 20 csúcsa van és G 10-szeresen élösszefüggő. Mutassuk meg, hogy G-nek van**

Hamilton köre.
Ha G 10-élöf, akkor minden csúcsának legalább 10 a foka, hiszen ellenkező esetben a minimális fokú csúcsból induló legfeljebb 9 él elhagyásától G szétesne. (4 pont)
A Dirac tétel szerint ha egy n csúcsú gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$, akkor G-ben van Hamilton kör. (4 pont)
Ez a tulajdonság fennáll a feladatbeli G gráfra $n = 20$-ra, tehát a Dirac tétel szerint annak van Hamilton köre, és nekünk pontosan ezt kellett bizonyítanunk. (2 pont)

10. **[ZH 2010. október 15.] Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?**
Ha i és j között él fut, akkor i és j közül pontosan az egyik páros, a másik páratlan. (3 pont)
Ez azt jelenti, hogy se két páros szám, se két páratlan szám között nem futhat él, (3 pont)
így G valóban páros: a színosztályokat a 100-nál nem nagyobb páros ill. páratlan pozitív egészek alkotják. (4 pont)

Meg lehet persze másképp is oldani.
Sosem fut él két csúcs között akkor, ha azok 4-gyel osztva ugyanannyi maradékot adnak. (2 pont)
Két különböző maradékosztály között pedig csak akkor futhat él, ha a maradékok különbsége 1 vagy a 0-ás és a 3-as maradékosztályról van szó. (2 pont)
A G gráf tehát páros, hiszen az 1-es és 3-as ill. a 2-es és 0-ás maradékosztály között nem vezet él, és ezek adják a színosztályokat. (6 pont)

11. **Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok. A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V = A \cup B \cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k-összefüggő?**
Ha két halmaz összes elemét elhagyjuk ($2r$ pontot), akkor csak egy csomó diszjunkt pontunk marad, így a gráf legfeljebb $2r$-összefüggő. $2r - 1$ pontot viszont bárhogy is hagyunk el, a gráf összefüggő marad (ugyanolyan gondolatmenettel, mint az 1-es feladatban). Így a $k = 2r$.

12. **G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?**
Igaz, mert egy páros gráfban minden kör páros hosszú, így egy Hamilton kör is, aminek minden második éle pont egy teljes párosítást ad. Megfordítva nem igaz, pl. egy $2k$ csúcsú páros gráfban, ahol minden pont foka 1, van teljes párosítás, de Hamilton-kör biztos nincs.

13. **Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban (tehát amiben minden fokszám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.**
Egy 2-reguláris gráf mindenképp körök uniója. Mivel páros, ezért esetünkben páros hosszú körök uniójáról beszélünk, mondjuk k darabról. Egy ilyenben kétféle teljes párosítást csinálhatunk (sorban minden második élet bevesszük, a

többit kihagyjuk, vagy felcseréljük a szerepeket). Az egyes komponensekben a választás viszont független egymástól, így a teljes párosítások száma 2^k.

14. **[pótZH 2010. ősz] Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.**
A tanult Hall-tétel szerint pontosan akkor van G-ben A-t fedő párosítás, ha teljesül a Hall-feltétel, (2 pont)
azaz tetszőleges $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$. (1 pont)
Ezt fogjuk tehát ellenőrizni. A feltétel szerint létezik olyan $c \geq 1$ egész szám, amire $d(a) \geq c \geq d(b)$ teljesül minden $a \in A$ és $b \in B$ csúcsra. (1 pont)
Jelölje $E(X)$ az X-ből induló élek halmazát. Világos, hogy $c \cdot |X| \leq |E(X)| \leq c \cdot |N(X)|$, hiszen minden X-beli csúcsból legalább c különböző él indul, míg egy $N(X)$-beli csúcsra pedig legfeljebb c $E(X)$-beli él illeszkedhet. (4 pont)
Mivel $c \neq 0$ ezért bátran leoszthatunk: $|X| \leq |N(X)|$, (1 pont)
azaz teljesül a Hall-feltétel, csakugyan létezik G-ben A-t fedő párosítás. (1 pont)

15. **Bizonyítsuk be, hogy egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor k-szorosan élösszefüggő, ha a csúcsoknak minden valódi $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazából legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba!**
Egyik irány: k-szorosan élösszefüggő $\Rightarrow \emptyset \neq X \subset V$: legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba. Tfh kevesebb, mint k, ekkor ha ezeket az éleket elhagyjuk, X egy külön komponenst fog alkotni, vagyis nem lehetett volna k-szorosan élösszefüggő.
Másik irány: $\emptyset \neq X \subset V$: legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba $\Rightarrow$ k-szorosan élösszefüggő. Tfh a gráf nem k-szorosan élösszefüggő. Ekkor van olyan $k-1$ él, amiket elhagyva a gráf több komponensre esik. Az egyik komponens csúcsai legyenek X, a többié pedig $V - X$. Ekkor e két halmaz között legfeljebb $k-1$ él futhatott, ami ellentmond a feltételnek.

16. **A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?**
Magyarul a feladat lényege: mennyi az a legkisebb élszámú 10 csúcsú gráf, ami 4-szeresen élösszefüggő? Mivel minden fokszám legalább 4 (különben 3 él elhagyásával a gráf már nem biztos, hogy összefüggő lenne), $e \geq 20$ (mert $10 \cdot 4 \leq 2e$). Ennyi elég is, mert a következő gráf 20 élet tartalmaz: 10 ponton keresztül két H-kör. Minden fokszám 4, és a két H-kör miatt tetszőleges két pont között van legalább éldiszjunkt 4 út, így 4-éöf. A teljes gráfból elhagyható élek száma tehát: $\binom{10}{2} - 20 = 25$.

17. **Bizonyítsuk be, hogy ha egy 2010-pontú G gráf 7-szeresen pontösszefüggő, akkor bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 287-élű út.**
Az ismert tétel alapján a feltételből következik, hogy tetszőleges u és v csúcs között legalább 7 pontdiszjunkt út vezet. Ezek az utak legfeljebb a maradék 2008 csúcson osztoznak, így legfeljebb 2008 pontot kell elosztani legalább 7 út között. $2008/7 < 287$, így a skatulya-elv miatt van olyan út, ami legfeljebb ennyi csúcsot, vagyis legfeljebb 287 élet tartalmaz.

18. **A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, amik G minden csúcsán áthaladnak?**
Csinálunk egy páros gráfot, ahol egy u csúcsból egy u_{be} és egy u_{ki} csúcs lesz, egy

uv irányított élből pedig egy $u_{ki}v_{be}$ irányítatlan él lesz. Ebben a páros gráfban egy teljes párosítás pont egy jó megoldásnak felel meg (ezt be kell bizonyítani!). A gráf a feltételek miatt k-reguláris, így van benne teljes párosítás, tehát kész vagyunk.

19. **A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!**
Hagyjuk el a kiválasztott élet a hozzátartozó csúcsokkal együtt! Az így keletkező gráfban minden szomszédság legfeljebb egy elemmel csökken, így $|N'(X)| \geq |N(X)| - 1 \geq |X|$ tetszőleges $X \subseteq A$-ra, kihasználva, hogy $|N(X)| > |X|$. A módosított gráfban a Frobenius-tétel szerint tehát van teljes párosítás, ehhez pedig hozzávehetjük az eredetileg választott élet, amivel már az eredeti gráfban is teljes párosításunk lesz.

20. **Legyen $G = (A, B; E)$ egy egyszerű páros gráf, melyben minden A-beli pont fokszáma azonos (d_A), és minden B-beli pont fokszáma is azonos (d_B). Tegyük fel, hogy $d_A, d_B > 0$. Mutassuk meg, hogy G-ben akkor és csak akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha $|A| \leq |B|$!**
Egyik irány: ha van A-t lefedő teljes párosítás, akkor mindegyik A-beli csúcsnak kell pár B-ben, így $|A| \leq |B|$. Másik irány: tudjuk, hogy $|A| \leq |B|$. Az élek számát felírhatjuk kétféleképpen is: $|A|d_A = |B|d_B$, ebből következik, hogy $d_A \geq d_B$. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq A$ halmazt. Belőle csak $N(X)$-be futnak élek, míg $N(X)$-ből legalább annyi élnek kell futnia, mint amennyi X-ből belefut: $|N(X)|d_B \geq |X|d_A$, amiből $d_A \geq d_B$ egyenlőtlenséget kihasználva következik, hogy $|N(X)| \geq |X|$, vagyis létezik A-t lefedő párosítás a Hall-tétel miatt.

21. **Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági- és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?**
Definiáljunk egy páros $G(V, M, E)$ gráfot úgy, hogy egyik csúcsosztályba tartoznak a vadászterületek, másikba a mezőgazdasági területek, egy vadász- és mezőgazdasági terület pedig pontosan akkor van összekötve, ha a kettőnek van közös része. Könnyen látszik, hogy pontosan akkor létezik megfelelő területkiosztás, ha G-ben létezik teljes párosítás. Vegyünk egy tetszőleges $X \subseteq V$ halmazt! Az ezekhez a csúcsokhoz tartozó összterület $|X|T/n$, ha T a sziget területe. Tfh kevesebb, mint $|X|$ mezőgazdasági területtel van közös területe X-nek. Ez azt jelenti, hogy $|X|T/n$ területet kellene lefedni kevesebb, mint $|X|$ darab T/n méretű területtel, ami nyilvánvalóan lehetetlen. Ezek alapján teljesül a Hall-feltétel, valamint $|V| = |M|$, tehát létezik teljes párosítás.