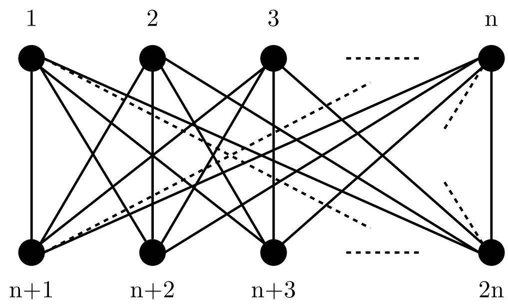
SzA VII. gyakorlat

Sok az összefüggés, valamint páros gráfok

2011. október 18.

1. Határozzuk meg azt a legnagyobb k számot, amelyre a következő, $2n$ csúcsú gráf ($K_{n,n}$, teljes páros gráf) k-szorosan összefüggő!



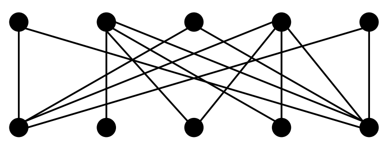
2. Igaz-e, hogy ha a G gráfban van k db éldiszjunkt út u-ból v-be, és v-ből w-be is, akkor van k db éldiszjunkt út u-ból w-be is?

3. Igaz-e, hogy ha a G gráfban van k db pontdiszjunkt út u-ból v-be, és v-ből w-be is, akkor van k db pontdiszjunkt út u-ból w-be is?

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf k-szorosan pontösszefüggő, akkor k-szorosan élösszefüggő is!

5. **[ZH 2008. október 10.]** Tegyük fel, hogy a G gráf k-szorosan élösszefüggő, F a G egy feszítőfája és e az F egy éle. Bizonyítsuk be, hogy a G gráfnak legalább $k-1$ olyan, e-től különböző f éle van, amire igaz, hogy F-ből e-t törölve és f-et behúzva G egy feszítőfáját kapjuk.

6. Adjunk meg egy maximális párosítást a következő gráfban!



7. Egy 12 fiúból és 12 lányból álló társaságban mindenki legalább 6 embert ismer az ellenkező neműek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy ekkor az egész társaság egymást ismerő fiú-lány párokba állítható!

---

8. **[ZH 2010. október 15.]** Tegyük fel, hogy a G gráf 3-szorosan élösszefüggő és létezik Euler-körsétája. Mutassuk meg, hogy G 4-szeresen élösszefüggő.

9. **[pótpótZH 2010. ősz]** Tegyük fel, hogy a G egyszerű gráfnak 20 csúcsa van és G 10-szeresen élösszefüggő. Mutassuk meg, hogy G-nek van Hamilton köre.

10. **[ZH 2010. október 15.]** Legyenek a G irányítatlan gráf csúcsai az $1, 2, \ldots, 100$ számok, az i és j csúcs között pedig akkor fusson él, ha $j < i$ esetén az $i - j$ szám 4-gyel osztva 1-et ad maradékul. Páros-e a G gráf?

11. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok. A $G = (V, E)$ gráf csúcshalmaza legyen $V = A \cup B \cup C$, és legyen $uv \in E$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora az a legnagyobb k érték, melyre G k-összefüggő?

12. G páros gráf. Igaz-e, hogy ha G-ben van Hamilton-kör, akkor van benne teljes párosítás? Igaz-e az állítás megfordítása?

13. Bizonyítsuk be, hogy egy 2-reguláris, páros gráfban (tehát amiben minden fokszám 2) a különböző teljes párosítások száma mindig 2-nek valamilyen pozitív egész kitevős hatványa.

14. **[pótZH 2010. ősz]** Bizonyítsuk be, hogy ha $G = (A, B; E)$ páros gráf és $a \in A, b \in B$ esetén $d(a) \geq d(b) \geq 1$, akkor van G-ben A-t fedő párosítás.

15. Bizonyítsuk be, hogy egy $G = (V, E)$ gráf akkor és csak akkor k-szorosan él-összefüggő, ha a csúcsoknak minden valódi $\emptyset \neq X \subset V$ részhalmazából legalább k él lép ki a $V - X$ halmazba!

16. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?

17. Bizonyítsuk be, hogy ha egy 2010-pontú G gráf 7-szeresen pontösszefüggő, akkor bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 287-élű út.

18. A G irányított gráf minden csúcsából k él indul és k él érkezik. Igaz-e, hogy G-nek kiválaszthatók pontdiszjunkt irányított körei, amik G minden csúcsán áthaladnak?

19. A $G = (A, B, E)$ páros gráfban $|A| = |B|$ és az A osztály minden valódi X részhalmazára (azaz $\emptyset \subset X \subset A$) teljesül, hogy $|N(X)| > |X|$. Igazoljuk, hogy G tetszőleges éle kiegészíthető teljes párosítássá!

20. Legyen $G = (A, B; E)$ egy egyszerű páros gráf, melyben minden A-beli pont fokszáma azonos (d_A), és minden B-beli pont fokszáma is azonos (d_B). Tegyük fel, hogy $d_A, d_B > 0$. Mutassuk meg, hogy G-ben akkor és csak akkor létezik A-t lefedő párosítás, ha $|A| \leq |B|$!

21. Egy szigeten n család lakik. A Sziget Vadászati Elöljáróság Területi Felügyelő Alosztálya felosztotta a szigetet n egyenlő részre, vadászterületeknek. Az Agráriumot Felügyelő Független Döntéshozó Testület is felosztotta a szigetet, n mezőgazdasági területre (természetesen a két felosztás különböző). A Szociális Végrehajtó Hivatal most szeretne minden családnak adni egy mezőgazdasági- és egy vadászterületet, de úgy, hogy a két területnek legyen közös része (ha már nem lehet azonos a kettő a jól kommunikáló testületek miatt). Megoldható-e ez mindig?