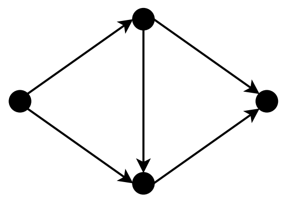
SzA V. gyakorlat

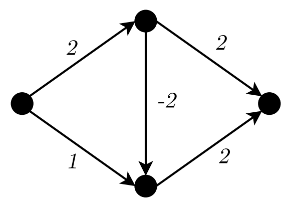
Legrövidebb

2011. október 4.

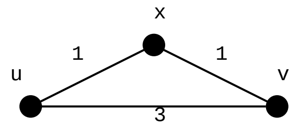
5. **[ZH 2008. október 10.] Határozzuk meg ebben a gráfban az élsúlyokat úgy, hogy a Dijkstra algoritmus rossz eredményt adjon!**



Attól, hogy rakunk bele negatív élsúlyt, még akár működhetne! Úgy kell negatív élsúlyt belerakni, hogy romoljon el. Az ábrán látható súlyozással az alsó csúcsra az algoritmus 1-et mond, pedig a legrövidebb út oda 0 lenne a bal oldali csúcsból.



6. **[pótpótZH 2010. ősz] Adott egy G gráf, az e él hosszát jelölje $l(e)$. Minden él hosszát növeljük meg 2-vel, azaz legyen $l'(e) = l(e) + 2$ minden élre. Tegyük fel, hogy u és v között P egy legrövidebb út az l' élhosszokkal. Igaz-e, hogy P biztosan egy legrövidebb út u és v között az l' élhosszokra nézve is?**
A válasz az, hogy általában nem igaz, hogy minden élhosszt egyformán növelve bármely legrövidebb uv út legrövidebb marad az új hosszokkal is. (1 pont)
Ennek igazolására elegendő egy ellenpéldát mutatni, azaz egy olyan élhosszokkal ellátott gráfot és abban egy legrövidebb uv utat, ami nem lesz legrövidebb az élhossznövelések után. (3 pont)
Az ábrán látható gráf ilyen: eredetileg az uxv út hossza 2, a közvetlen uv él hossza pedig 3, tehát uxv az egyedüli legrövidebb uv út. Az élhosszok növelése után az uxv hossza 6 lesz, míg az uv élé 5, tehát uxv nem marad legrövidebb út. (6 pont)



7. **[ZH 2010. október 15.] Legyenek az F fa csúcsai az $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$, élei pedig $v_i v_{i+1}$, ha $1 \leq i \leq 4$ ill. $v_5 v_j$, ha $6 \leq j \leq 10$. Tegyük fel, hogy F a G egyszerű gráf v_1-ből indított szélességi bejárásához tartozó fa. Legfeljebb hány éle lehet G-nek?**
Tanultuk, hogy az F fában minden v_1-ből vezető út a G gráfnak egy legrövidebb útja az adott csúcsba. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy a $v_1, v_2, \ldots, v_5$ pontokból nem indulhat további éle G-nek, hiszen ekkor valamelyik csúcsba vezetne v_1ből rövidebb út, mint a fabeli. (3

pont)
A G gráfnak tehát csak a $v_6, v_7, \ldots, v_{10}$ csúcsok között vezethet további éle. (1 pont)
Ezen csúcsok közé bárhogy is húzunk be további éleket, az F fa az így kapott G gráf szélességi bejáráshoz tartozó fája marad. (2 pont)
Mivel 5 csúcs közé $\binom{5}{2} = 10$ él húzható, a G gráfnak legfeljebb $10 + 9 = 19$ éle lehet, ahol a 9 az F élszáma. (2 pont)

8. **A G irányított gráfról tudjuk, hogy pontosan egy negatív él van benne, és nem tartalmaz negatív összhosszúságú kört. Az s csúcsból szeretnénk legrövidebb utat találni az összes többibe. Hogy tudnánk ezt megtenni a Dijsktra algoritmus (esetleg többszöri) felhasználásával?**
Egy legrövidebb út kétféle lehet: vagy használja a negatív élet, vagy nem. Először futtassunk egy Dijsktrát (a szépség kedvéért hagyjuk ki a negatív élet), az i csúcsba vezető legrövidebb út hosszát jelölje d_i^+. Jelölje u azt a csúcsot, amiből a negatív él indul. Világos, hogy d_u^+ helyes, hiszen a negatív élen nem mehetünk át az ő eléréséhez az eredeti gráfban. Belőle is indíthatunk egy Dijsktrát (az eredeti gráfon), hiszen ekkor először a negatív él másik végpontját veszi be a KÉSZ halmazba, ami a definíciónak megfelel. Ezeket a legrövidebb értékeket jelölje d_i^-. A legrövidebb utak tehát $\min(d_i^+, d_u^+ + d_i^-)$ képlettel számolhatók. Így két Dijsktra segítségével kész is vagyunk.