SzA IV. gyakorlat

Fázunk, utazunk, körözünk

2011. szeptember 27.

9. **Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!**
   Tfh nem összefüggő. Ekkor nyilván legalább két komponense van. Vegyük a legkisebb (k) csúcsszámú komponensét, aminek legfeljebb $n/2$ csúcsa van (skatulya elv)! Mivel a gráf egyszerű, ezért ebben a komponensben a legnagyobb fokszám legfeljebb $k-1$ lehet, viszont $k-1 \leq n/2-1$. Ennek a komponensnek a fokszámai tehát a feltétellel együtt a következőt kell, hogy teljesítsék: $n/2 \leq d_i \leq n/2-1$, ami lehetetlen.

10. **[pótpótZH 2010. ősz] Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)| - |E(G)|$ komponense van.**
    Tegyük fel, hogy a G gráfnak k komponense van, rendre $n_1, n_2, \ldots, n_k$ csúccsal. (2 pont)
    Mindegyik komponens tartalmaz egy-egy feszítőfát, (2 pont)
    és minden feszítőfának eggyel kevesebb éle van, mint az adott komponens mérete. (2 pont)
    Ezek szerint G éleinek számára azt kapjuk, hogy $|E(G)| \geq n_1 - 1 + n_2 - 1 + \ldots + n_k - 1 = n_1 + n_2 + \ldots + n_k - k = |V(G)| - k$. (3 pont)
    Innen a feladat állítása közvetlenül adódik. (1 pont)

    Persze másképp is érvelhetünk.

    Ha G-nek egy élét elhagyjuk, attól legfeljebb eggyel nő a gráf komponenseinek száma. (3 pont)
    Ha G minden élét elhagyjuk, akkor a komponensek száma az eredeti k-ról $|V(G)|$-re növekszik, hiszen minden pont izolált lesz. (3 pont)
    Ezek szerint $k + |E(G)| \geq |V(G)|$, (3 pont)
    és ebből átrendezéssel a feladat állítását kapjuk: $k \geq |V(G)| - |E(G)|$. (1 pont)

11. **Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!**
    Tfh nem összefüggő. Ekkor a komplementer összefüggő (mint azt régebben bizonyítottuk), viszont egy összefüggő gráf nem lehet izomorf egy nem összefüggővel, így az eredeti gráfnak összefüggőnek kellett lennie.

12. **Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!**
    Tudjuk, hogy egy n csúcsú fának $n-1$ éle van, továbbá egy e élű gráf komplementerének $\binom{n}{2} - e$ éle van, két izomorf gráf éleinek száma pedig megegyezik. Így $n - 1 = \binom{n}{2} - (n-1)$, ahonnan $n = 1$ vagy $n = 4$, tehát csak 1 és 4 csúcsú fák jöhetnek szóba. Az egy csúcsú egyértelmű, és megnézve jó is. 4 csúcsú esetén az elsőfokú pontok száma lehet 2, így a 4 hosszú utat kapjuk, ami pont jó is. Ha az elsőfokú pontok száma 3 lenne, akkor a gráfot („csillag”) felrajzolva látjuk, hogy nem jó. Más 4 csúcsú fa pedig nem lehet.

13. **Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?**

A Kruskal algoritmus először az 1 súlyú élek közül fog választani, belőlük tud építeni egy $k-1$ elű fát. Utána a 2 súlyúak következnek, belőlük $l-1$-et lehet választani. A végén az x_i és y_j pontokon lesz két feszítőfa, ezeket muszáj egy 3 súlyú éllel összekötni. Tehát $(k-1)\cdot 1+(l-1)\cdot 2+3=k+2l$.

14. **[pótpótZH 2010. ősz] A G gráfot úgy kapjuk, hogy az $1,2,\dots$ csúcscímkékkel ellátott teljes gráfban párhuzamos élekként megkettőzzük a $(2,3,2,2,5,3,5,2)$ Prüfer-kódú F feszítőfa éleit. Van-e G-nek Euler-körsétája?**

    A G gráfot úgy kapjuk, hogy egy teljes (így öf) gráfba további éleket húzunk be, így G mindenféleképp öf lesz. (1 pont)

    Az órán tanult tétel szerint tehát G-nek pontosan akkor van Euler-körsétája, ha minden csúcsának páros a fokszáma. (3 pont)

    Mivel a Prüfer-kód hossza 8, ezért G-nek 10 csúcsa van. (1 pont)

    A K_{10} gráfban minden pont foka 9, ezért G-ben pontosan akkor lesz minden pont foka páros, ha F minden csúcsának a foka páratlan. (2 pont)

    Tanultuk, hogy a Prüfer-kódban minden csúcs eggyel kevesebbszer szerepel, a fokszámánál, (1 pont)

    márpedig a konkrét Prüfer-kódban minden csúcs ps sokszor szerepel (a 0 is ps szám). (1 pont)

    Tehát F-ben minden fok ptn, így G-ben minden fok ps, vagyis van Euler-körséta G-ben. (1 pont)

    Lehet persze favágással is.

    Az órán tanultak szerint megkonstruáljuk a kérdéses F fát a Prüfer-kódjából. F-nek 10 pontja van, hisz a kód hossza 8. A táblázat felső sora a letörölt leveleket mutatja:

1	4	6	7	8	9	3	5	2
2	3	2	2	5	3	5	2	10

    Felrajzoljuk (amit itt most nem teszek meg). (5 pont)

    Ha F csúcsaira még egy teljes gráfot illesztünk, akkor az így kapott gráf öf marad, (1 pont)

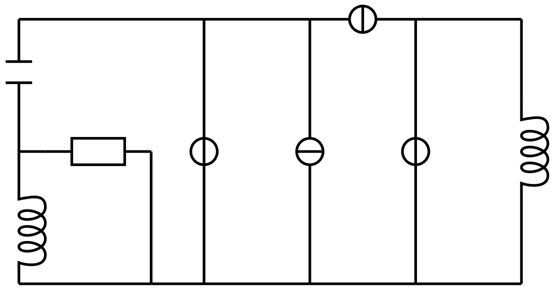
    és minden csúcsának a foka ps lesz, hisz F-ben is és K_{10}-ben is minden csúcs foka páratlan. (1 pont)

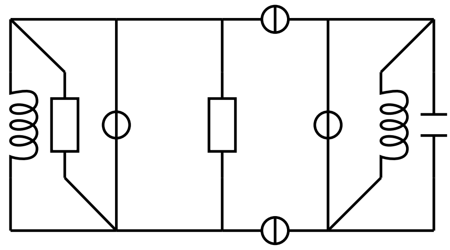
    Az órán tanult tétel szerint tehát G-nek van Euler-körsétája. (3 pont)

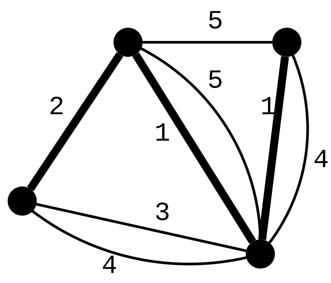
15. **Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!**

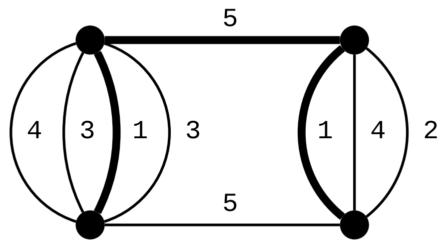
    Definiáljunk egy gráfot, amiben minden embernek egy csúcsot feleltetünk meg, és két csúcs akkor van összekötve, ha ismerik egymást. Ha ebben a gráfban találunk Hamilton-kört, akkor a kör mentén le tudjuk őket ültetni. 12 csúcsunk van és minden fokszám legalább 6, így a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör a gráfban, tehát létezik ilyen leültetés.

16. **Egyértelműen megoldhatók-e a következő villamos hálózatok?**









Felrajzolva a hozzájuk tartozó gráfot minimális feszítőfakeresés után megállapítjuk, hogy a bal oldaliban találtunk egy normál fát (minden 1-es él szerepel benne, és nem szerepel benne 5-ös), míg a jobb oldaliban nem (a feszítőfában szerepel 5-ös). A minktg feszfa vastagítva van.

17. **Hány olyan különböző fa adható meg n címkézett ponton, amely nem út?**
Cayley-tétel alapján a különböző fák száma n^{n-2}. Egy út az ténylegesen a csúcsok egy permutációja, ezeket majd le kell vonni, de előbb vegyük észre, hogy egy útnak két permutáció felel meg (oda és vissza). A végeredmény tehát: $n^{n-2} - n!/2$

18. **Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!**
Ha mindenki legalább $n/2$ embert ismer, akkor ez lehetséges ugyanúgy, mint a korábbi feladatban. Ha kevesebb, mint $n/2$-t, akkor vegyük az előbb definiált gráf komplementerét, és az itt talált Hamilton-kör pont egy olyan leültetésnek fog megfelelni, ahol senki nem ismeri a mellette lévőket. A komplementerben már teljesül a Dirac-tétel feltétele, így itt is létezik Hamilton-kör.

19. **Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?**
11 létezik, pl K_5-höz kapcsolva egy éllel egy csúcsot pont ilyet kapunk. 12 él esetén a gráfunk pont 3 éllel tartalmaz kevesebbet, mint K_6. Ha tehát K_6-ból úgy hagyunk el 3 élet, hogy nem mind egy ponthoz kapcsolódik, akkor a fokszámok legfeljebb 2-vel csökkennek, vagyis minden pont foka legalább 3 lesz. Ekkor a Dirac-tétel értelmében van Hamilton-kör. Ha az elhagyott 3 él 1 pontra illeszkedett, akkor a fokszámok: $2, 4, 4, 4, 5, 5$. Az Ore-tétel miatt ebben az esetben is van Hamilton-kör.

20. **Hány éle van az n pontú egyszerű összefüggő gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?**
A gráfban biztosan van kör, különben nem lehetne több feszítőfa. Egy k hosszú

körből tetszőleges él kihagyásával különböző feszítőfákat csinálhatunk, így esetünkben legfeljebb egy darab, három hosszú kör lehet. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha egy élet elhagyva már fát kapunk, tehát $n-1+1=n$ csúcsú a gráf.

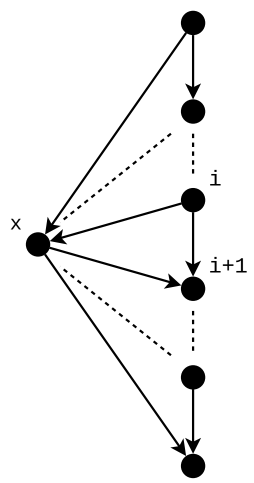
21. **Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!**
Vegyünk a gráfhoz egy pontot, ahonnan húzzunk éleket az összes eredeti pontba. Az új gráf csúcsainak száma $2k+2$, a fokszámok pedig eggyel növekedtek (az új pont foka $2k+1$), így mindegyik legalább $k+1$. A Dirac-tétel szerint ebben a gráfban van Hamilton-kör, ami biztos átmegy az új csúcson is. Ha ezt a csúcsot az éleivel elhagyjuk, akkor a Hamilton-kör „maradéka" pont egy Hamilton-út lesz az eredeti gráfban.

22. **Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$!**
Tfh a másodfokú pontok száma $n-3$. Ekkor mivel van legalább két elsőfokú pont, már csak egy pont fokszáma kérdéses. Tudjuk, hogy $n-1$ él van, így a fokszámok összege $1+1+(n-3)\cdot 2+d=2e=2\cdot(n-1)$, ahonnan $d=2$ adódna, viszont ez ellentmond a feltételnek, hiszen $n-2$ másodfokú pont lenne.

23. **Egy n pontú fa Prüfer-kódjában k különböző szám szerepel. Hány elsőfokú pontja lehet ekkor a fának?**
Tudjuk, hogy minden sorszám pontosan az adott pont fokszámánál eggyel kevesebbszer szerepel a kódban. Az elsőfokú pontok tehát pontosan 0-szor szerepelnek. Ha kódban n pont közül k féle szerepel, akkor $n-k$ féle nem, vagyis ennyi elsőfokú pont van.

24. **Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1-e_1+e_2$ és $T_2-e_2+e_1$ is fa.**
Az e_2-nek a T_2 azon útján kell lenni, ami az e_1 két végpontját összeköti. Ráadásul olyan él kell, ami a T_1-e_1 két komponense között halad. Az adott út az egyik komponensből indul, a másikban ér véget, szóval biztos lesz ilyen él, és az jó is.

25. **Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!**



Teljes indukcióval. $n = 1$ csúcs esetén triviálisan igaz. Tfh valamilyen n-re igaz, vizsgáljuk meg $n+1$-re! Az $n+1$ csúcsú teljes gráfból elhagyva egy tetszőleges x pontot egy n csúcsút kapunk, amiben az indukciós feltétel miatt van irányított H-út. Ha x-ből pont ezen H út elejére mutat él, vagy a H-út végéből pont x-be mutat él, akkor x-et a H-út elejére vagy végére téve pont egy jó irányított H-utunk lesz. Baj csak a akkor van, ha az ábrán látható eset áll elő. Ekkor viszont biztos van az úton olyan i csúcs, hogy i-ből x-be mutat él, és x-ből $i+1$-be. Ide beillesztve x-et egy jó H-utat kapunk.