SzA IV. gyakorlat

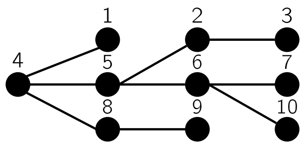
Fázunk, utazunk, körözünk

2011. szeptember 27.

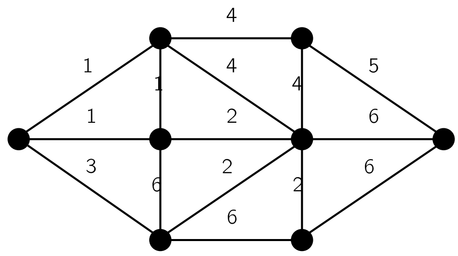
1. Igaz-e, hogy tetszőleges G egyszerű gráf esetén vagy G, vagy a komplementere összefüggő?

2. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?

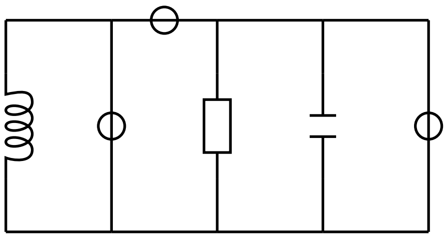
3. (a) Mi a Prüfer-kódja a következő fának?
   (b) Rajzoljuk le azt a fát, aminek $2, 5, 5, 1, 4, 6, 6, 5$ a Prüfer-kódja!

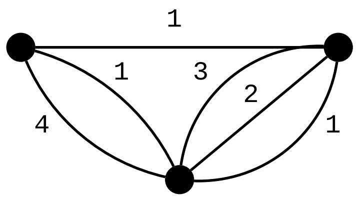


4. Mennyi a következő gráfban a minimális feszítőfa súlya? Hány különböző minimális feszítőfa van?



5. Egyértelműen megoldható-e a következő villamos hálózat? (Segítségképpen a hozzá tartozó gráf is fel van rajzolva.)

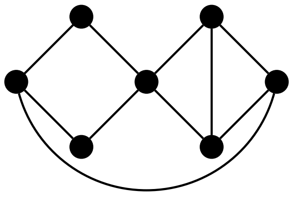


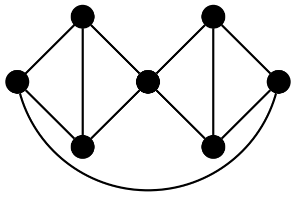


6. Legalább hány összehasonlítás kell ahhoz, hogy egy n elemű tömbből egy olyan tagot találjunk meg, ami a tömb 10 legkisebb eleme közé tartozik?

7. **[ZH 2006. március 28.]** Legyen G egy összefüggő gráf, amiben minden pont foka páros. Igaz-e, hogy ha elhagyjuk G-ből egy körének éleit, akkor a maradékban biztosan van Euler-körséta?

8. Mutassunk Hamilton-kört a következő gráfokban, vagy lássuk be, hogy nincs!





---

9. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsuk be, hogy a gráf összefüggő!

10. **[pótpótZH 2010. ősz]** Mutassuk meg, hogy bármely véges G gráfnak legalább $|V(G)| - |E(G)|$ komponense van.

11. Egy gráf izomorf a komplementerével. Mutassuk meg, hogy összefüggő!

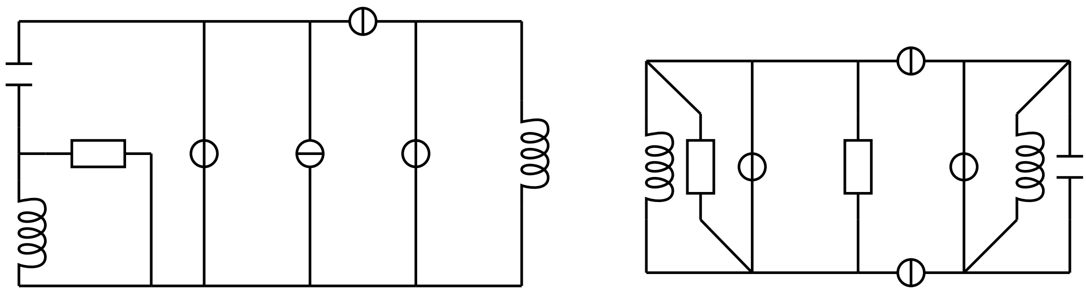
12. Rajzoljuk le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!

13. Egy teljes gráf ponthalmaza $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_l$. Az (x_i, x_j) élek költsége (súlya) 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké 3. Mennyibe kerül a legolcsóbb feszítőfa?

14. **[pótpótZH 2010. ősz]** A G gráfot úgy kapjuk, hogy az $1, 2, \ldots$ csúcscímkékkel ellátott teljes gráfban párhuzamos élekként megkettőzzük a $(2, 3, 2, 2, 5, 3, 5, 2)$ Prüfer-kódú F feszítőfa éleit. Van-e G-nek Euler-körsétája?

15. Egy 12 fős társaságban mindenki legalább 6 embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait!

16. Egyértelműen megoldhatók-e a következő villamos hálózatok?



17. Hány olyan különböző fa adható meg n címkézett ponton, amely nem út?

18. Egy 20 fős társaságban mindenki ugyanannyi embert ismer (az ismeretség kölcsönös). Bizonyítsuk be, hogy leültethetők egy kerek asztal köré vagy úgy, hogy mindenki ismerje a szomszédait, vagy úgy, hogy senki se ismerje a szomszédait!

19. Létezik-e olyan 6 pontú és 11 illetve 12 élű gráf, melyben nincs Hamilton-kör?

20. Hány éle van az n pontú egyszerű összefüggő gráfnak, ha pontosan 3 különböző feszítőfája van?

21. Igazoljuk, hogy ha egy $2k+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább k, akkor a gráfban van Hamilton-út!

22. Bizonyítsuk be, hogy egy n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $n-3$!

23. Egy n pontú fa Prüfer-kódjában k különböző szám szerepel. Hány elsőfokú pontja lehet ekkor a fának?

24. Bizonyítsuk be, hogy ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.

25. Egy teljes gráf minden élét irányítsuk meg valamelyik irányban. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott gráfban van irányított Hamilton-út!