SzA III. gyakorlat

Rendezettek vagyunk, továbbá barátkozás a gráfokkal

2011. szeptember 20.

7. **A** $[6,4,8,3,7,2,5,1]$ **tömb rendezése során (a rendező algoritmus néhány lépése után) a következő közbülső állapot jött létre:** $[4,6,3,8,7,2,5,1]$. **Az alább felsorolt módszerek közül mely(ek) alkalmazásakor fordulhatott elő?**

   (a) **beszúrásos rendezés** nem, mert teljes méretű listánk csak a rendezés legvégén van, viszont akkor már rendezett.

   (b) **buborékrendezés** igen, először 4-6 csere, aztán 6-8 nem csere, majd 8-3 csere, és pont ez jön ki.

   (c) **összefésüléses rendezés** implementációtól függ. Ha külön ábrázoljuk a közbülső listákat, akkor teljes hosszúság csak a legvégén, rendezett állapotban lehet, tehát nem. Ha egyben, akkor a $[6,4]$, $[8,3]$, $[7,2]$, $[5,1]$ kis listákból az első kettőt már rendezte, a többit még nem.

8. **Szeretnénk** n **db SZA-hallgató ZH-ereményeit (csak az összpontszámot) növekvő sorrendben felsorolni. Adjunk erre** $c{\cdot}n$ **lépést felhasználó algoritmust!**
   Mivel a ZH-eredmény egy $[0,60]$ intervallumba eső egész szám, ezért tudunk ládarendezést alkalmazni 61 láda felhasználásával.

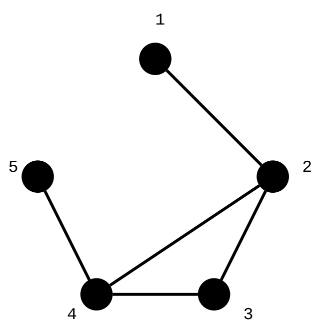
9. **[ZH 2009. november 23.] A következő tömbök egy gráf szomszédossági listáját írják le. A csúcshoz tartozó mutatók listája:**

3	6	5	4	2

   Az éleket leíró láncolt lista:

4	4	2	3	2	3	2	4	5	1
10	*	*	7	8	1	9	*	*	*

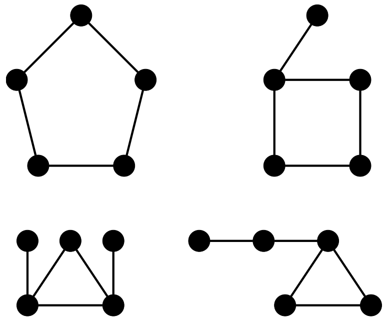
   Rajzolja le a gráfot!



10. **Az előre megszámozott (címkézett)** n **darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?**
    A $\binom{n}{2}$ lehetséges él mindegyikéről függetlenül döntünk, hogy be legyen-e húzva, így $2^{\binom{n}{2}}$.

11. **[ZH, 2006. március 28.] Rajzolja fel az összes olyan páronként nem izomorf egyszerű, összefüggő 5 pontú gráfot, amelyben pontosan egy kör van és a maximális fokszáma legfeljebb 3.**

A kör lehet 5, 4 vagy 3 hosszú. 5 hosszú esetben csak C_5 jöhet szóba, több él esetén létrehoznánk extra kör(öke)t. 4 hosszú esetén a kimaradt csúcsot egy éllel hozzá kell kötni a körhöz, más élt nem vehetünk fel kör létrehozása nélkül. 3 hosszú kör esetén a két kimaradó pont közül vagy mindkettő a körön van rajta, vagy egy 2 hosszú út van a körön. További élek szintén nem vehetők fel, valamint mindkét körön kívüli csúcs a fokszámkorlát miatt nem kapcsolódhat ugyanahhoz a csúcshoz. Tehát:



12. **[pótZH, 2008. december 5.] A K_6 gráf minden éléhez kiválasztunk 3 különböző számot az $\{1,2,3,4,5\}$ halmazból. Bizonyítsuk be, hogy bárhogyan is tesszük ezt, lesz két különböző él, amikhez ugyanazt a három számot választottuk.**
A K_6 teljes gráfnak $\binom{6}{2} = \frac{6\cdot 5}{2} = 15$ éle van. (3 pont)
Az élekhez választott lehetséges számhármasok száma $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5\cdot 4}{2} = 10$. (3 pont)
Mivel $15 > 10$, ezért a skatulya-elv szerint lesz két olyan él, amihez ugyanaz a számhármas tartozik. (4 pont)

13. **Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?**
Vegyük észre, hogy K_{60}-nak pont 1770 éle lenne! Ebből a mi gráfunknak 2 éle hiányzik. Tehát a kérdés: K_{60}-ból hogy hagyhatunk el két élet? Egyik lehetőség, hogy egy csúcs két élét hagyjuk el, másik pedig az, ha a két élet két különböző csúcstól hagyjuk el. Más lehetőségünk nincs, különben izomorf gráfokat kapnánk. Tehát 2.

14. **Bizonyítsuk be, hogy egy gráfban a páratlan fokszámú pontok száma páros!**
Tfh nem igaz, vagyis a páratlan fokszámú pontok száma páratlan. Ekkor írjuk fel a fokszámok összegét:
$$\sum_{v\in V} d(v) = 2e,$$
ahol a jobb oldalon egy páros szám áll. A bal oldal paritásában nem számítanak a páros fokszámok, így páratlan darab páratlan fokszám összege is páratlan, tehát a bal oldal páratlan, ami lehetetlen, tehát páros darab páratlan fokszámú pontnak kell lennie.

15. **Adjunk $c\cdot n$ lépésszámú algoritmust n olyan egész számból álló sorozat rendezésére, melynek elemei az**

(a) $\{1, \dots, 3n\}$ **tartományba esnek!** Ládarendezés $3n$ ládával (a lépésszám ekkor beírás (n) + minden láda kiolvasása ($3n$), azaz összesen $4n$).

(b) $\{1, \dots, n^7 - 1\}$ **tartományba esnek!** Itt nem lenne jó a normál ládarendezés, hiszen n^7 láda kéne, ami már túl sok. Úgy lehet megcsinálni, hogy n-es számrendszerben írjuk fel a számokat, amik így legfeljebb 7-jegyűek. Ezeket radix rendezéssel rendezzük (számjegyenként), amin belül egy számjegy szerint a rendezés egy n ládás ládarendezéssel megy. De ebből a tárgyból nem volt szó radix rendezésről.

16. **[pótpótZH, 2010. ősz] A valós számokból álló $a_1, \dots, a_n$ sorozat olyan, hogy az $a_1^3, a_2^3, \dots, a_n^3$ sorozat egy darabig nő, utána csökken. Adjunk konstansszor n összehasonlítást használó algoritmust, ami rendezi az $a_1, \dots, a_n$ sorozatot.**
Az a^3 függvény szigorúan monoton nő, így a sorozat az a_i értékek szerint is úgy néz ki, hogy egy darabig nő, utána csökken. Kezdjük el olvasni a sorozatot elölről és hátulról (mintha két különböző sorozat lenne), és az értékeket fésüljük össze. Ha összeértünk a két olvasással, akkor készen vagyunk. n elem összefésülése $c \cdot n$ lépés, így ez megfelelő. (Természetesen azt is megcsinálhatjuk, hogy megkeressük a töréspontot, szétszedjük a sorozatot két külön önmagában rendezett listába, aztán azokat fésüljük össze.)

17. **Adottak a sík egész koordinátájú $P_1 = (x_1, y_1), \dots, P_n = (x_n, y_n)$ koordinátájú pontjai. Javasoljunk egy legfeljebb $c \cdot n$ lépésszámű módszert olyan $P_i \neq P_j$ pontok kiválasztására, amelyeken átmenő egyenes által meghatározott félsíkok közül az egyik tartalmazza az összes pontot!**
Minimális y kooridántájú pont lesz az egyik, ami meghatározza, a másik pedig az y_{min}-es pontból abszolútértékben legnagyobb meredekségű. Ha ezeken kívül esne egy pont, akkor annak a meredeksége abszolútértékben nagyobb lenne. Meredekséget számolni két pont ismeretében konstans, így a lépésszám két minimumkeresés, azaz $c_1 \cdot n + c_2 \cdot n = c \cdot n$. (Persze ugyanezt lehet x koordináta szerint is, valamint minimum helyett maximummal is.)

18. **Igaz-e, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatók úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör?**
Számozzuk meg a csúcsokat az $1 \dots n$ számokkal, és az élek mindig a kisebb sorszám felől a nagyobb felé legyenek irányítva. Tfh van kör, ami áthalad az i csúcson: ekkor sorban a kör csúcsai: $i < j < \cdots < k < i$, ami ellentmondás, tehát a gráfban nincs irányított kör.

19. **A következő gráfok közül soronként kettő izomorf. Melyek ezek?**
Első sor: első kettőnek négy, utolsónak 3 pontja van, így csak a 4 pontúak lehetnek izomorfak.
Második sor: az elsőben és utolsóban 4 harmadfokú pont van, míg a középsőben csak kettő, így első és utolsó lehet csak izomorf.
Harmadik sor: az elsőben és másodikban van negyedfokú pont, a harmadikban nincs. Így első kettő lehet csak izomorf. Negyedik sor: az utolsó kettőben a másodfokú pontok közül az egyik két negydfokúval, a másik két harmadfokúval szomszédos, míg az elsőben mindkét másodfokúnak van egy negyed- és harmadfokú szomszédja, így csak az utolsó kettő lehet izomorf.
Természetesen meg kéne adni az izomorfak között a hozzárendelést is!