SzA II. gyakorlat

Hányféleképpen?

2011. szeptember 13.

8. **Hányféleképpen választhatunk ki a $\{-10, -9, -8, \ldots 10\}$ számok közül 4 különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül úgy, hogy a szorzatuk pozitív legyen?**
   Vagy választunk 4 negatívot, vagy 4 pozitívot, vagy 2 negatívot és két pozitívot, így $\binom{10}{4} + \binom{10}{4} + \binom{10}{2}\binom{10}{2}$.

9. **Hány olyan tízjegyű szám van, melyben a második számjegy 5-ös?**
   $9 \cdot 1 \cdot 10^8$, mert az első helyre 0-t nem választhatunk, második hely fix, az összes többire pedig az összes számjegyet választhatjuk.

10. **Hány olyan tízjegyű szám van, melyben szerepel az 5-ös számjegy?**
    Az összes lehetségesből eldobjuk azokat, amelyekben *nem* szerepel az 5-ös számjegy (az első helyen természetesn nem állhat 0): $9 \cdot 10^9 - 8 \cdot 9^9$.

11. **Hány olyan 10 hosszú 0-1 sorozat van, melyben legalább 8 darab egyes van?**
    Vagy minden jegy 1, vagy választanunk kell 1 helyet 1 nullának, vagy két 0-t kell elhelyzni: $1 + \binom{10}{1} + \binom{10}{2}$.

12. **Hány olyan négyjegyű szám van, melyben a jegyek szigorúan monoton növekvő sorrendben követik egymást?**
    Észrevehetjük, hogy tetszőleges 4 különböző számjegyből tudunk a feltételeknek megfelelő számot előállítani, a számjegyek sorbarendezésével. A 0 nem szerepelhet, mert annak kéne az első jegynek lennie, ami nem jó. Így egyszerűen a 9 lehetséges számjegyből kell négyet választani: $\binom{9}{4}$.

13. **Egy 12 fős társaságot egy szálloda két háromágyas és három kétágyas szobájában kell elszállásolni. Hány különböző szobabeosztás lehetséges, ha az azonos számú ágyat tartalmazó szobákat nem különböztetjük meg egymástól?**
    $\frac{\binom{12}{3}\binom{9}{3}\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{2!3!}$, mert a 12 emberből kiválasztunk hármat az első háromágyas szobába, aztán a maradékból megint hármat a másodikba sít. Ekkor viszont az azonos szobák különböző sorrendjeit külön eseteknek vettük, ezért kell az osztás.

14. **Hányféleképpen helyezhető el 20 különböző zászló 10 számozott zászlórúdra úgy, hogy egy rúdon tetszőlegesen sok zászló lehet (0 és 20 között), és az egyes rudakon a zászlók sorrendje nem számít?**
    Minden zászlóhoz egymástól függetlenül el kell dönteni, hogy melyik rúdra kerüljön: 10^{20}.

15. **Egy cirkuszban az állatidomár összesen 7 nagymacskát szeretne a porondra küldeni. A cirkusznak tigrisei, oroszlánjai és párducai vannak, mindből legalább 7 darab. Ha nem tudjuk megkülönböztetni az azonos fajú állatokat, akkor hányféle bevonulási sorrend közül választhat az idomár? És ha a sorrend nem számít?**

3^7, mert minden pozícióba választunk egy macskát a többitől függetlenül. Ha a sorrend nem számít, akkor ez az ismétléses kombináció $n = 3, k = 7$ esete.

16. **Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyapakliból 4 lapot úgy, hogy legyen benne**

    (a) **piros vagy ász?** $\binom{32}{4} - \binom{21}{4}$, vagyis az összesből levonva a rossz húzásokat.

    (b) **piros és ász?** $\binom{32}{4} - \binom{24}{4} - \binom{28}{4} + \binom{21}{4}$, vagyis az összesből levonjuk az így és az úgy rosszakat, viszont a mindkét feltétel szerinti rosszakat kétszer is levontuk, ezért ezeket az eseteket hozzá kell még adni.

17. **[pótpótZH, 2010. ősz] A Cayley egyetem kombinatorika-kertészet szakának első 3 félévében összesen 18 tárgyat kell elvégezni, minden félévben hatot. Az előtanulmányi rend szerint a *Fák* tárgyat a *Feszítőfák* tárgynál előbb kell felvenni, más megkötés nincs. Hányféleképp lehet felvenni a tárgyakat az egyes félévekben, feltéve, hogy minden felvett tárgyat már az adott félévben sikeresen teljesítenek a hallgatók?**
    Ha tudjuk, hogy a „Fák” ill. a „Feszítőfák” tárgyat melyik két félévben veszi fel egy hallgató, akkor a nyilván az korábbi félévben kell felvennie az előbbi, a későbbiben pedig az utóbbi tárgyat. (1 pont)
    E két félévet $\binom{3}{2} = 3$-féleképp választhatjuk. (2 pont)
    Ha már tudjuk, hogy melyik két félévről van szó, akkor a maradék 16 tárgyat kell a 3 félévre beosztani, úgy hogy arra a félévre, amikorra a fenti tárgyak egyikét sem vette fel, 6 tárgy jusson, a „Fák”-at hallgatott félévre 5, a „Feszítőfák”-at tartalmazóra pedig szintén további 5 tárgy kerüljön. (3 pont)
    A 6 tárgy felvételére $\binom{16}{6}$ lehetőség van, a maradék tárgyakból az 5-öt $\binom{10}{5}$-féleképp lehet kiválasztani, a megmaradó 5 tárgy pedig a feszítőfákkal együtt szerepel. (3 pont)
    A választásaink függetlenek, ezért a válasz $3 \cdot \binom{16}{6}\binom{10}{5} = 3 \cdot \frac{16!}{10! \cdot 6!} \cdot \frac{10!}{5! \cdot 5!} = 3 \cdot \frac{16!}{6! \cdot 5!^2}$. (1 pont)

18. **Hány olyan szám van 1 és 1000 között (zárt intervallum), ami nem relatív prím 105-höz?**
    Azok nem relatív prímek $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$-hez, amik 3-mal, 5-tel vagy 7-tel oszthatók. A számukat a szita-formula segítségével könnyen megkaphatjuk: $|$3-mal oszthatók$|$ + $|$5-tel oszthatók$|$ + $|$7-tel oszthatók$|$ − $|$15-tel oszthatók$|$ − $|$21-gyel oszthatók$|$ − $|$35-tel oszthatók$|$ + $|$105-tel oszthatók$|$ $= \lfloor 1000/3 \rfloor + \ldots$

19. **Bizonyítsuk be, hogy a jelenlévők között van legalább 2, aki a hét ugyanazon napján született!**
    Mivel a hétnek 7 napja van, a skatulya elv alapján 7-nél több ember nem születhetett különböző napon (és feltesszük, hogy többen vagyunk, mint 7).

20. **Bizonyítsuk be, hogy egy csoportban mindig van legalább két olyan ember, akik ugyanannyi embert ismernek a csoportból! (Az ismeretségek kölcsönösek.)**
    Tfh nincs két ilyen ember, azaz mindenki különböző számú embert ismert. Egy ember legkevesebb 0, legfeljebb $n - 1$ embert ismerhet (ha n ember van a csoportban). Így az n-féle ismerettségi érték csak úgy jöhet létre, ha van, aki $0, 1, \ldots, n - 1$ embert ismer. Viszont ekkor az kéne, hogy valaki egy embert sem ismer, valaki más pedig mindenkit, ami lehetetlen.

21. **Igazoljuk, hogy öt darab, 10-nél nagyobb prím között lenni kell kettőnek, amik különbsége osztható 10-zel!**
A 10-nél nagyobb prímek biztos nem oszthatók 2-vel és 5-tel, így utolsó számjegyük csak az $\{1, 3, 7, 9\}$ halmaz valamelyik eleme lehet. Viszont mivel 5 prímünk és csak legfeljebb 4 utolsó számjegyünk van, így biztos van 2 olyan (a skatulya-elv miatt), amiknek ugyanaz az utolsó számjegye, vagyis különbségük osztható 10-zel.

22. **Bizonyítsuk be, hogy**

    (a) $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n}{k} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix}$

    (b) $n \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = (k+1) \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

    Egyszerű átalakításokkal.